

Notății (simboluri matematice) folosite în acest manual

Distanța de la punctul A la dreapta e : $d(A; e)$,
sau Ae

Distanța dintre punctele A și B : AB sau $\overline{AB}$ sau
 $d(A; B)$

Dreapta determinată de punctele A și B : $e(A; B)$

Unghiul dreptelor f_1 și f_2 : $\sphericalangle(f_1; f_2)$ sau $(f_1; f_2) \sphericalangle$

Unghiul cu vârful în punctul C determinat de
punctele A și B , care se află pe laturile un-
ghiului: $ACB \sphericalangle$

Unghiul cu vârful în punctul C : $C \sphericalangle$

Unghiuri: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Triunghi determinat de punctele A, B, C : $ABC\triangle$

Aria triunghiului ABC : $T(ABC)$ sau T_{ABC}

Semiperimetrul triunghiului de laturi egale

$$\text{cu } a, b, c: s = \frac{a+b+c}{2}$$

Unghi drept: $\perp$

Dreapta e este perpendiculară pe dreapta f :
 $e \perp f$

Dreapta e este paralelă cu dreapta f : $e \parallel f$

Congruență: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

Raportul de asemănare: λ

Vectorul determinat de punctele A și B
(direcționat de la A la B): $\overrightarrow{AB}$

Egal, diferit: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Identic egal: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Aproximativ egal: $\approx$; $a \approx 2,3$; $8,54 \approx 8,5$

Mai mic, mai mic sau egal: $<, \leq$; $2 < 3, 5 \leq x$

Mai mare, mai mare sau egal: $>, \geq$; $6 > 4$,
 $a \geq 2$

Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \dots\}$

Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z}$;
 $\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Mulțimea numerelor întregi pozitive și negative:
 $\mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \dots\}, \{-1; -2; -3; \dots\}$

Mulțimea numerelor raționale și iraționale:
 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$

Mulțimea numerelor raționale pozitive și nega-
tive: $\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$

Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R}$

Mulțimea numerelor reale pozitive și negative:
 $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$

Apartine (element al mulțimii), nu aparține
mulțimii: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}, -2 \notin \mathbf{Z}^+$

Submulțime, submulțime netrivială: $\subseteq, \subset$;

$$A \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$$

Interval închis: $[a; b]$

Interval închis la stânga, deschis la dreapta: $[a; b[$

Interval deschis la stânga, închis la dreapta: $]a; b]$

Interval deschis: $]a; b[$

Valoarea absolută a numărului x : $|x|$;

$$|-3,1| = 3,1$$

Legea de corespondență a funcției f :

$$f: x \mapsto 2x + 3 \text{ sau } f(x) = y, f(x) = 2x + 3$$

Valoarea funcției în punctul x_0 : $f(x_0)$; $f(5)$, dacă
 $x_0 = 5$

n factorial: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Logaritm în baza a : $\log_a x$

Logaritm în baza 10: $\lg x$

Logaritm în baza e : $\ln x$

Coefficient binomial (k sub n): $\binom{n}{k}$

Radical de ordinul doi (rădăcină pătrată) din x :
 $\sqrt{x}$

Radical de ordinul n din x : $\sqrt[n]{x}$

Propoziție: A, B

Valoarea de adevăr a propoziției: $|A| = i$,
 $|B| = h$

Negație: $\neg, \neg A$ (non A)

Conjunție: $P \wedge Q$ (P și Q)

Disjuncție: $P \vee Q$ (P sau Q)

Implicație: $\rightarrow$, sau $\Rightarrow, A \rightarrow B$ sau $A \Rightarrow B$ (A im-
plică pe B)

Echivalență: $\leftrightarrow$ sau $\Leftrightarrow, A \leftrightarrow B$ sau $A \Leftrightarrow B$ (A
dacă și numai dacă B)

a_n : termenul n al unui șir

n : numărul termenilor unui șir

d : rația unei progresii aritmetice

S_n : suma primilor n termeni ai unui șir

q : rația unei progresii geometrice

r : rază

d : diametru

P : suprafața laterală

T : arie

A : suprafață

V : volum

Introducere (Prefață)

Scopul acestui manual este sprijinirea pregătirii elevilor pentru examenul de bacalaureat de nivel mediu. Dezvoltarea concepției matematice la elevi, se realizează prin elaborarea *componentelor materiei* acestei discipline, legate de *definiții și noțiuni*.

Exemplele rezolvate contribuie la predarea noilor cunoștințe și la asimilarea materiei. La sfârșitul fiecărui capitol se găsesc exerciții și probleme cu scopul de a ajuta pregătirea elevilor pentru examenul de bacalaureat de nivel mediu.

Pe parcursul studiilor liceale se realizează consolidarea cunoștințelor mai devreme însușite pe cale intuitivă, prin intermediul diferitelor activități, consolidare urmată de definirea exactă a noțiunilor și generalizarea acestora. Dorim să dezvoltăm deprinderile elevilor de a fi capabili să aplice în cadrul *altor arii curriculare* relațiile pe care și le-au însușit în diverse domenii ale disciplinei, vom sprijini aplicarea de către elevi a matematicii în rezolvarea unor *probleme cu caracter practic*. *Ilustrațiile și fotografiile* vor stimula asimilarea cunoștințelor și a relațiilor matematice.

În materia prezentată vom formula anumite *ipoteze* care vor putea fi demonstrate sau infirmate în câteva etape. Este foarte importantă stărnirea interesului elevilor pentru *demonstrația* afirmațiilor. Vom prezenta demonstrațiile unor teoreme mai simple, câteva metode de demonstrație, respectiv formularea exactă a unor *noțiuni și reguli*. (Acestea le vom marca cu albastru în manual.)

În text am marcat cu albastru anumite curiozități din istoria matematicii și cele legate de disciplina noastră. (*Propunem folosirea internetului pentru completarea acestor informații.*)

Una dintre cele mai importante sarcini ale profesorilor de matematică este cultivarea interesului pentru rezolvarea problemelor. Condiția indispensabilă a acestui deziderat este *înțelegerea unor texte simple de matematică* și analiza lor. Dezvoltarea deprinderilor de a discuta problemele, de a căuta, de a găsi mai multe soluții, va contribui de asemenea la dezvoltarea *gândirii logice*.

Gândirea logică este indispensabilă atât la rezolvarea problemelor, cât și la procedurile algoritmice și la aplicații. Elaborarea unor *algoritmi* de câțiva pași în diferite domenii ale matematicii este necesară și la studiul informaticii.

nivel mediu, mai simplă; **K1** Problemele elaborate pe parcursul celor patru ani de studii, în funcție de gradul de dificultate al acestora, vor contribui la pregătirea elevilor pentru examenul de bacalaureat. Le-am clasificat în felul următor:

nivel mediu, mai dificilă; **K2**

nivel ridicat, mai simplă; **E1**

nivel ridicat, mai dificilă; **E2** Pentru cei interesați, dornici să exerseze, mai recomandăm probleme selectate din familia cu-legerilor MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény în ediția Editurii Didactice.

Materia pentru examenul de bacalaureat de nivel ridicat a fost marcată cu litere minuscule de culoarea verde.

Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászsné Dr. Simon Judit:

16125/I (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
16125/II MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Megoldások
16126/I (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.
12126/II MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Megoldások

Czapáry Endre–Czapáry Endréné–Csete Lajos–Hegyi Györgyné–Iványiné Harró Ágota–Morvai Éva–Reiman István:

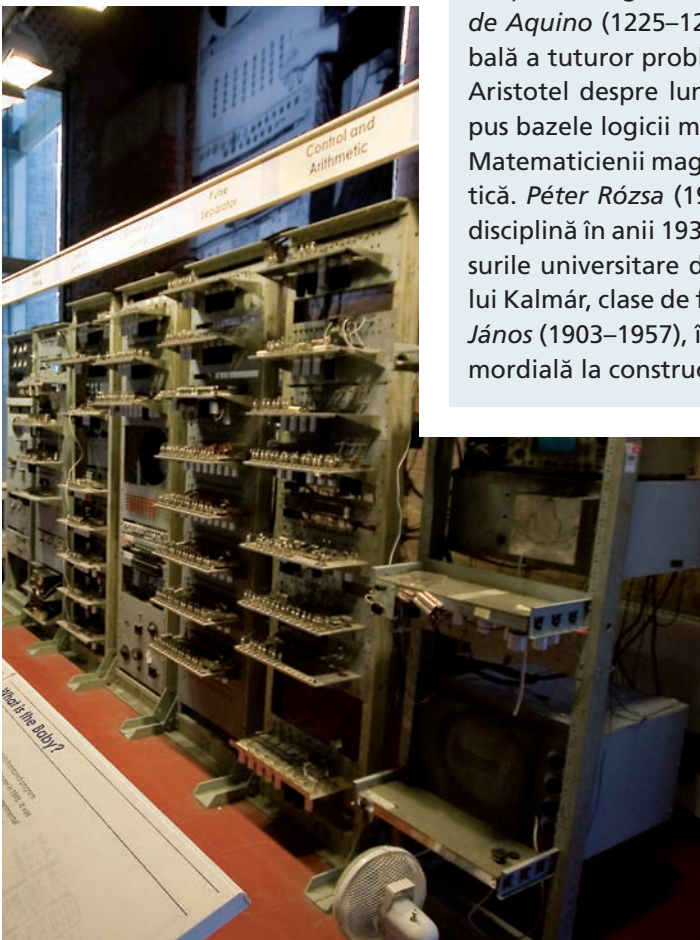
16127/I (+ CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Geometriai feladatok gyűjteménye
16127/II MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Megoldások, Geometriai feladatok gyűjteménye



I. Logica matematică

Primele rezultate ale logicii (știința gândirii) au apărut în Antichitate, deoarece dezvoltarea științelor a necesitat cercetarea gândirii umane. O importanță deosebită în acest sens a avut opera lui *Aristotel* (384–322 î.Hr.) despre logică. El a cunoscut creațiile intelectuale din secolele trecute și a studiat metodele gândirii umane necesare în cercetările științifice viitoare. Desigur au existat antecedente care l-au ajutat în cercetările sale. Pentru a găsi acestea, trebuie să studiem rezultatele istoriei matematicii din secolele anterioare.

Timp îndelungat metodele logicii nu s-au schimbat esențial. *Sfântul Toma de Aquino* (1225–1274) a realizat o expunere sistematică, concisă și globală a tuturor problemelor teologice creștine, în acord cu conceptele lui *Aristotel* despre lume. În secolul al XIX-lea *Georg Boole* (1815–1864) a pus bazele logicii matematice în lucrarea sa intitulată *Legile gândirii*. Matematicienii maghiari au avut rezultate deosebite și în logica matematică. *Péter Rózsa* (1905–1977) a obținut rezultate importante în această disciplină în anii 1930. Numele lui *Kalmár László* (1905–1976) apare în cursurile universitare de logica matematică din toată lumea (demonstrația lui Kalmár, clase de funcții Kalmár). Cercetările și rezultatele lui *Neumann János* (1903–1957), în teoria logicii matematice, au avut o contribuție primordială la construcția primului computer electronic.



1. Noțiunile de bază ale logicii matematice

În matematică, propozițiile enunțative, despre care putem afirma imediat dacă sunt adevărate sau false, au o mare importanță.

Propoziție

Propoziția este un enunț (o afirmație) despre care se poate afirma univoc dacă este adevărată sau falsă.

Valoarea (logică) de adevăr a unei propoziții

În legătură cu o propoziție, *adevărat* sau *fals* sunt valorile de adevăr ale propoziției date.

Propozițiile se pot formula în oricare domeniu al vieții cotidiene. Le vom nota cu literele mari ale alfabetului.

$$\begin{aligned} |A| &= i \\ |B| &= h \end{aligned}$$

Dacă propoziția A este adevărată, folosim notația $|A| = i$.

Dacă propoziția B este falsă, folosim notația $|B| = h$. (i și h sunt valorile de adevăr).

Exemplul 1 Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor de mai jos.

A : 12 este un număr par

B : Azi e miercuri.

C : La noi ninge acum.

D : Orice număr prim este impar.

E : Există o infinitate de numere prime gemene.

Soluție

A este adevărată, iar D falsă. $|A| = i$, $|D| = h$.

Despre valorile de adevăr ale lui B și C nu putem afirma nimic. În momentul citirii acestui text cititorul poate decide dacă sunt adevărate sau false. Se poate întâmpla ca în momentul actual să nu putem afirma nimic despre valoarea de adevăr, totuși să vorbim despre propoziții. De exemplu propoziția E .

Exemplul 2 Să se decidă dacă afirmațiile de mai jos sunt propoziții sau nu.

A : Atenție! Apa este adâncă.

B : Care a fost tema de casă pentru azi?

C : A trecut pe aici.

D : Să se calculeze perimetrul pătratului care are lungimea laturii egală cu 4 cm.

E : Ai cumva un pix roșu?

F : Cea mai frumoasă poezie a lui Petőfi Sándor este *Szülőföldemen*.

G : Mâine va fi timp frumos.

Soluție

În logică propozițiile interogative sau exclamative nu se consideră propoziții.

Astfel afirmațiile A , B , D , E nu sunt propoziții.

C este o propoziție enunțativă, dar nu putem decide valoarea ei de adevăr, deci în logică nu se consideră propoziție.

La fel și F , întrucât nu avem o definiție exactă care este poezia cea mai frumoasă. Pentru unii da, pentru alții nu. Deci F nu este propoziție.



În cazul afirmației G , în general nu se poate decide valoarea de adevăr, numai în cazuri concrete. Deci nici G nu este propoziție.

În exemplul 1 am formulat câteva propoziții care nu se pot descompune în părți, adică nu se pot formula prin legarea a două propoziții.

Acestea se numesc **propoziții simple**.

Alte exemple de propoziții.

A : 9 este număr prim.

Se știe că $|A| = h$.

Am putea da o altă formulare, mai acceptabilă pentru noi.

B : 9 nu este număr prim.

Se știe că $|B| = i$.

Se poate afirma că propoziția B este negația propoziției A , sau $B = \text{non } A$.

Negația este o operație logică prin care ajungem la o nouă propoziție.

Notăție: A (non A)

Propoziții simple

Semnul negației: $\neg$
 $\neg A$ (non A)

În clasa a 9-a am constatat că limbajul matematicii de multe ori diferă esențial de limbajul cotidian. Dacă de exemplu afirmăm despre un material că nu este de calitate bună, aceasta înseamnă în limbajul cotidian că este de calitate slabă, dar în matematică numai atât: că nu este de calitate bună. Limbajul cotidian nu face diferență între negația sau contrara unei propoziții. Propozițiile contrare nu pot fi simultan adevărate dar pot să fie false amândouă.

În tabelul următor prezentăm câteva exemple.

Propoziția	Negația	Contrara	Se poate și astfel
este bună	nu este bună	rea	indiferentă
este negativă	nu este negativă	pozitivă	zero
este neagră	nu este neagră	albă	verde
Soarele strălucește	Soarele nu strălucește	cerul este noros	este noapte
par	nu este par	impar	numărul este o fracție

Exemplul 3 Să se scrie negațiile următoarelor propoziții.

A : Ninge.

B : Fiecare coleg de clasă este băiat.

C : Fiecare triunghi are un unghi drept.

Soluție

$\neg A$: nu este adevărat că ninge, adică nu ninge.

$\neg B$: nu este adevărat că fiecare coleg al meu este băiat, adică există și fete în clasă.

$\neg C$: nu este adevărat că fiecare triunghi are un unghi drept, adică există triunghi care nu are unghi drept.

Probleme

1. K1 Să se decidă despre afirmațiile de mai jos dacă sunt propoziții.

A : Atenție! Câinele mușcă.



B: Ce culoare are cămașa ta?

C: Am pus acolo.

D: Să se calculeze aria unui triunghi dacă lungimea înălțimii este egală cu 5 cm.

E: Acesta este un sacou maro?

F: Mâine nu va ploua.

2. K1 Să se decidă despre afirmațiile de mai jos dacă sunt propoziții. În cazul propozițiilor să se stabilească valorile de adevăr.

A: 2×2 câte odată fac 5.

B: Două drumuri stau în fața mea, pe care să-l aleg?

C: Jumătate din 100 Ft este 50Ft.

D: Pasărea are voie să zboare de pe o creangă pe cealaltă.

3. K1 Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor de mai jos.

A: Numărul 11 este impar.

B: Numărul 267 este divizibil cu 3.

C: Deltoidul este un patrulater care are unghi drept.

D: Păianjenul are 6 picioare.

E: Versetul *Talán eltűnök hirtelen* este citat dintr-o poezie a lui József Attila.

F: Simbolul chimic pentru cadmiu este Ca.

G: Pârâul Bódva trece prin Edelény.

H: *Tizenhárom alfafa* este titlul unui roman al lui Vass Albert.

Pentru luarea deciziilor puteți folosi literatura de specialitate sau internetul.



4. K1 Afirmațiile de mai jos seamănă cu proverbele cunoscute de noi. Să se scrie acestea sub forma lor obișnuită.

A: A strica orzul pe găște.

B: Fiecare se leagă unde-l doare.

C: Crede că tot ce zboară se mănâncă.

D: Altă făină se macină acum la moară!

5. K1 Să se scrie negațiile și contrarele cuvintelor următoare.

a) înalt; b) prost; c) subțire; d) colțuros; e) mic; f) urâtă.

6. K2 Să se scrie negațiile următoarelor propoziții. Să se decidă care dintre ele sunt adevărate: propoziția sau negația?

A: Orice număr natural este pozitiv.

B: În orice paralelogram cele două diagonale au lungimi egale.

C: Orice număr divizibil cu 3 este divizibil și cu 9.

D: Există triunghi care are un singur unghi ascuțit.

E: Există triunghi astfel încât exact două laturi au lungimi egale.

F: Dintre cinci numere impare consecutive, fiecare poate fi număr prim.



Alte probleme:
Matematika gyakorló
és érettségire felkészítő
feladatgyűjtemény I.:
1–18.

2. Operații logice

În lecțiile anterioare am constatat că prin negația unei propoziții ajungem la o propoziție nouă. Oare nu există și alte modalități de a lega propoziții simple între ele ca să ajungem la propoziții noi? În cele ce urmează vom studia această problemă.

Un scop foarte important al logicii constă în găsirea unor concluzii adevărate. Reamintim două exemple de la orele de matematică care au condus la concluzii adevărate.

a) Dacă un număr întreg este divizibil cu 2 și 3, atunci este divizibil cu 6.

Acest număr nu este divizibil cu 3, deci nu este divizibil cu 6.

b) Dacă un triunghi are un unghi de 60°, are și axă de simetrie, atunci triunghiul este regulat (echilateral).

Acest triunghi nu are axă de simetrie, deci nu este echilateral.

Am văzut două exemple în care în ciuda conținutului diferit, propozițiile au aceleași structuri. Care este această structură?

Dacă A și B , atunci C .

Non B , deci non C .

A , B , C , înseamnă propoziții ale căror valori logice sunt adevărate sau false. Ele sunt legate de cuvintele *nu*; *dacă...*, *atunci...*. Aceste cuvinte generează **operații logice**, cu ajutorul cărora am creat **propoziții compuse**.

Propoziții compuse

În continuare vom studia operațiile logice care apar mai des.

I. NEGAȚIA

Negația (Negarea)

După cum am constatat anterior, negația este una dintre operațiile logice cele mai simple.

Exemplul 1 Să se determine valorile logice ale următoarelor propoziții.

A : Numărul 8 este un număr compus.

B : Numărul 8 nu este un număr compus.

C : Orice paralelogram este romb.

D : Nu orice paralelogram este romb.

Soluție

$|A| = i$;

$|B| = h$;

$|C| = h$;

$|D| = i$.

Negarea unei afirmații, în termeni de specialitate se numește: **negație**.

Negația



Legea dublei negații

NEGAȚIA

Negația propoziției P este propoziția $\neg P$ (sau o formă reformulată a acesteia).
Notăție: $\neg P$ ($\text{non}P$)

După cum am văzut și în cazul exemplului 1:

Dacă propoziția P este adevărată, atunci $\neg P$ este falsă,

Dacă propoziția P este falsă, atunci $\neg P$ este adevărată.

Operația negație este definită în tabelul următor:

P	$\neg P$
i	h
h	i

Din definiția negației rezultă proprietatea $\neg(\neg A) = A$, ceea ce se numește **legea dublei negații**.

În consecință propozițiile de mai jos au aceleași valori de adevăr.

A : Am citit această definiție.

B : Nu este adevărat că nu am citit această definiție. Ambele propoziții exprimă același conținut.

În limba cotidiană aceste propoziții pot apărea în diferite situații cu diferite accente.

II. CONJUNCȚIA

Două propoziții simple se pot lega cu conjuncția **și**. Această operație logică se numește **conjuncție**.

Conjuncția

Conjuncția propozițiilor P , Q este propoziția P și Q (sau o formă reformulată a acesteia).
Notăție: $P \wedge Q$ (P și Q).

Exemplul 2 Să se determine valorile logice ale următoarelor propoziții compuse.

A : Latura ce mai lungă a unui triunghi dreptunghic este ipotenuza, iar cel mai mare unghi al său este unghiul drept.

B : Numărul 3 este prim și 11 este divizibil cu 3.

C : Tangenta și cotangenta unghiului de 90° nu există. (Nu se poate defini).

D : Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu 360° , și a celor exterioare cu 180° .

Soluție

P : Latura ce mai lungă a unui triunghi dreptunghic este ipotenuza. $|P| = i$,

Q : Cel mai mare unghi al unui triunghi dreptunghic este unghiul drept. $|Q| = i$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|A| = |P \wedge Q| = i$.

P : Numărul 3 este prim. $|P| = i$,

Q : Numărul 11 este divizibil cu 3. $|Q| = h$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|B| = |P \wedge Q| = h$.



P : Tangenta unghiului de 90° nu există. (Nu se poate defini). $|P| = i$.

Q : Cotangenta unghiului de 90° nu există. (Nu se poate defini). $|Q| = h$,

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|C| = |P \wedge Q| = h$.

P : Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu 360° . $|P| = h$,

Q : Suma unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 180° . $|Q| = h$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|D| = |P \wedge Q| = h$.

În conformitate cu rezultatele exemplului anterior se poate completa tabelul de adevăr al conjuncției:

P	Q	$P \wedge Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Deci propoziția $P \wedge Q$ este falsă dacă și numai dacă cel puțin una din propoziții este falsă.

Propoziția $P \wedge Q$ este adevărată dacă și numai dacă ambele propoziții sunt adevărate.

Tabelul de adevăr al
conjuncției
 $P \wedge Q$

III. DISJUNCȚIA

Două propoziții simple se pot lega cu conjuncția **sau**. Această operație logică se numește **disjuncție**.

Disjuncția

Disjuncția propozițiilor P , Q este propoziția P sau Q (sau o formă reformulată a acesteia).

Notăție: $P \vee Q$ (P sau Q).

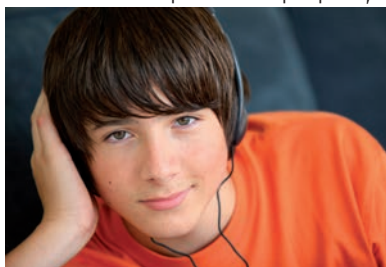
Folosirea conjuncției **sau** necesită o atenție deosebită, ceea ce vom ilustra prin două propoziții.

A : Péter face ordine pe biroul său, sau ascultă muzică.

Această propoziție se poate interpreta în mai multe feluri. Se poate întâmpla ca Péter:

1. face ordine dar nu ascultă muzică,
2. nu face ordine dar ascultă muzică,
3. face ordine și ascultă muzică.

Folosirea conjuncției **sau** în acest caz este **permisivă (sau permisiv)**.



Sau permisiv

B : Péter face curățenie în camera sa, sau se duce să facă cumpărături.

Din interpretarea acestei propoziții reiese clar că nu poate să facă ambele lucruri în același timp.

Folosirea conjuncției **sau** în acest caz este **exclusivă (sau exclusiv)**.

Sau exclusiv

Cu toate că există și operația disjuncția exclusivă, în continuare noi ne vom ocupa numai de sau permisiv.

Exemplul 3 Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor compuse, de mai jos.

A : 3 sau 7 sunt divizori ai lui 63.

B : 3 sau 13 sunt divizori ai lui 63.

C : 2 sau 7 sunt divizori ai lui 63.

D : 2 sau 5 sunt divizori ai lui 63.

Soluție

P : 3 este divizor al lui 63. $|P| = i$,

Q : 7 este divizor al lui 63. $|Q| = i$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|A| = |P \vee Q| = i$.

P : 3 este divizor al lui 63. $|P| = i$,

Q : 13 este divizor al lui 63. $|Q| = h$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|B| = |P \vee Q| = i$.

P : 2 este divizor al lui 63. $|P| = h$,

Q : 7 este divizor al lui 63. $|Q| = i$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|C| = |P \vee Q| = i$.

P : 2 este divizor al lui 63. $|P| = h$,

Q : 5 este divizor al lui 63. $|Q| = h$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse: $|D| = |P \vee Q| = h$.

Disjuncția
Tabelul de adevăr
al propoziției
 $P \vee Q$

Pe baza celor stabilite la exemplul 3, se poate completa tabelul de adevăr al disjuncției.

P	Q	$P \vee Q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

În consecință propoziția $P \vee Q$ este adevărată dacă și numai dacă este adevărată cel puțin una din propozițiile P, Q .

Propoziția $P \vee Q$ este falsă dacă și numai dacă amândouă propozițiile sunt false.

Probleme

1. K1 Să se arate cu ajutorul tabelelor de adevăr că

- a) conjuncția;
 - b) disjuncția
- sunt operații comutative.

2. K2 Să se arate identitățile următoare cu ajutorul tabelelor de adevăr.

- a) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
 - b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
- (Relațiile lui de Morgan)

3. K2 Negați următoarele propoziții!

A: Beau sirop de soc sau mănânc tocană de cartofi cu boia de ardei.

B: Plec la o plimbare cu câinele sau cosesc iarba din grădină.

C: Fac tema de casă la matematică și nu dau drumul la calculator.

D: Nu cumpăr pâine sau cumpăr cașcaval.

4. K1 Propozițiile următoare sunt negațiile unor proverbe cunoscute. Să se scrie proverbele originale.

$\neg A$: Există cazuri când ceva nu merge bine, totuși se termină cu bine.

$\neg B$: Există câine care nu latră, totuși mușcă.



5. K2 Există propoziții identice (echivalente) între cele date mai jos?

$A \wedge B, A \wedge (\neg B), (\neg A) \wedge B, (\neg A) \wedge (\neg B), A \vee B, A \vee (\neg B), (\neg A) \vee B, (\neg A) \vee (\neg B).$

6. K2 Să se caute propozițiile identice (echivalente) între cele date mai jos.

$A \wedge B, A \wedge (\neg B), (\neg A) \wedge B, (\neg A) \wedge (\neg B), \neg(A \vee B), \neg(A \vee (\neg B)), \neg((\neg A) \vee B), \neg((\neg A) \vee (\neg B)).$

7. K2 Să se caute propozițiile identice (echivalente) între cele date mai jos.

$\neg(A \wedge B), \neg(A \wedge (\neg B)), \neg((\neg A) \wedge B), \neg((\neg A) \wedge (\neg B)), A \vee B, A \vee (\neg B), (\neg A) \vee B, (\neg A) \vee (\neg B).$

Alte probleme:

Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 19–22.

3. Proprietățile operațiilor logice

În continuare vom prezenta câteva proprietăți ale operațiilor $\wedge, \vee, \neg$.

Din definițiile **conjunției și disjuncției** rezultă imediat că aceste operații sunt **comutative**, adică:

$A \wedge B = B \wedge A, A \vee B = B \vee A$, pentru orice propoziții A, B .

Se pot defini conjuncțiile mai multor propoziții.

Conjuncția propozițiilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ este $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$.

Această propoziție este adevărată dacă fiecare propoziție este adevărată.

Din definiție rezultă că operația conjuncție este **asociativă**, adică:

$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$ pentru orice A_1, A_2, A_3 .

Se pot defini disjuncțiile mai multor propoziții.

Disjuncția propozițiilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ este $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$.

Această propoziție este adevărată dacă cel puțin una din propoziții este adevărată.

Din definiție rezultă că operația disjuncție este **asociativă**, adică:

$(A_1 \vee A_2) \vee A_3 = A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$ pentru orice A_1, A_2, A_3 .

Relații importante există între negație, conjuncție și disjuncție: **relațiile lui de Morgan**, care urmau să fie demonstrate cu ajutorul tabelului de adevăr în problema propusă 2.

$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B),$

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B).$

În istoria logicii au avut o importanță deosebită două legi logice, care vor fi demonstrate în exemplele de mai jos.

Exemplul 1 Să se arate că $|(\neg A) \vee A| = i$!

Soluție

Întocmim tabelul de adevăr.

A	$\neg A$	$(\neg A) \vee A$
i	h	i
h	i	i

Principiul terțului
exclus

Se poate constata că propoziția $(\neg A) \vee A$ este adevărată indiferent de valoarea logică a lui A . Acesta este **principiul terțului exclus**.

Exemplul 2 Să se arate că $|\neg A \wedge A| = h$!

Soluție

Întocmim tabelul de adevăr.

A	$\neg A$	$\neg A \wedge A$
i	h	h
h	i	h

Principiul
necontradicției

Se poate constata că propoziția $(A) (\neg A) \wedge A$ este falsă indiferent de valoarea logică a lui A . Acesta este **principiul necontradicției**.

Până în prezent, la studiul operațiilor logice am făcut abstracție de conținutul propozițiilor și am lucrat numai cu valorile de adevăr. În continuare vom prezenta operații cu **valorile de adevăr**. Definițiile acestor operații sunt următoarele:

$$\begin{array}{llll} \neg i = h; & \neg h = i; & & \\ i \wedge i = i; & i \wedge h = h; & h \wedge i = h; & h \wedge h = h; \\ i \vee i = i; & i \vee h = i; & h \vee i = i; & h \vee h = h. \end{array}$$

Exemplul 3 Fie $|P| = p$ (valorile posibile ale lui p sunt i sau h). Să se arate că
a) $p \wedge h = h$;
b) $p \vee i = i$!

Soluție

- a) Deoarece $i \wedge h = h$ precum și $h \wedge h = h$, proprietatea este adevărată.
b) Deoarece $i \vee i = i$ precum și $h \vee i = i$, proprietatea este adevărată.

Exemplul 4 Să se studieze dacă propozițiile $A \vee (B \wedge C)$ și $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ au valori de adevăr identice pentru orice A, B, C .

Soluție

Ambele propoziții compuse conțin trei propoziții, deci în tabelul de adevăr vom studia $2^3 = 8$ posibilități.



A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	h	i	i	i	i
i	h	i	h	i	i	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i	i
h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	i	h	h	h	i	h
h	h	h	h	h	h	h	h

Coloanele 5 și 8 ne arată că cele două propoziții au valori de adevăr identice.

În consecință se poate scrie identitatea $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ pentru orice A, B, C , adică am arătat că operația logică **disjuncția este distributivă față de conjuncție**.

Se poate demonstra și identitatea următoare:

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ pentru orice A, B, C , adică am arătat că operația logică **conjuncția este distributivă față de disjuncție**.

Demonstrația o cerem într-o problemă propusă.

Probleme

1. K1 Să se demonstreze identitățile următoare.

- $A \wedge A = A$;
- $A \vee A = A$;
- $A \wedge (A \vee B) = A$;
- $A \vee (A \wedge B) = A$.

2. K1 Fie $|P| = p$ (valorile posibile ale lui p sunt i sau h). Să se arate că

- $p \wedge i = p$;
- $p \vee h = p$.

3. K2 Să se demonstreze că operația logică conjuncție este distributivă față de disjuncție, adică: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ pentru orice A, B, C .

4. K2 Aplicând proprietățile de distributivitate să se scrie într-o formă mai scurtă propozițiile următoare.

- Pe mâine citesc această nuvelă și fac o partidă de șah cu Ágnes, sau pe mâine citesc această nuvelă și fac o partidă de tenis de masă cu Ágnes.
- Mă duc să fac o partidă de volei sau fac o ceașcă de ceai, și mă duc să fac o partidă de volei sau fac un sandvici cald.



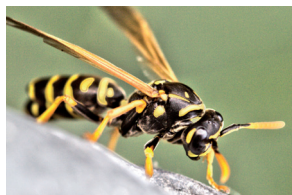
Alte probleme:
Matematika gyakorló
és érettségire felkészítő
feladatgyűjtemény I.:
23–25.

4. Alte două operații logice

Până în prezent am prezentat trei operații logice importante, iar în această lecție vom cunoaște alte două.

Cu acestea ne întâlnim des, nu numai la orele de matematică, ci și în viața cotidiană.

Dacă A , atunci B



I. Când formulăm niște concluzii, ne întâlnim cu astfel de propoziții:

Dacă diagonalele unui patrulater se înjumătățesc, atunci patrulaterul este un paralelogram

Dacă ultima cifră a unui număr întreg este egală cu 0, atunci acest număr este divizibil cu 10.

Dacă o vietate are șase picioare, atunci ea este o insectă.

Dacă temperatura aerului scade sub 0° , atunci îngheață apa.

Structura fiecărei propoziții este de forma **dacă A , atunci B** . Această operație logică se numește **implicație**.

Implicația

Propoziția dacă A , atunci B , se numește implicație.

Notăție: $A \rightarrow B$ sau $A \Rightarrow B$ (A implică pe B)

În matematică, la formularea teoremelor folosim foarte des implicația. În acest caz $A \rightarrow B$ se mai citește: A este condiția suficientă a lui B , sau B este condiția necesară a lui A .

A se mai numește **premisă** sau **ipoteză**, iar B **concluzie**.

Dacă ipoteza este adevărată, atunci valoarea de adevăr a implicației va fi egală cu valoarea de adevăr a concluziei. Prin convenție acceptăm că în cazul când ipoteza este falsă, implicația este adevărată. (Din faptul că ipoteza este falsă nu se poate trage nici o consecință asupra concluziei).

Implicația este definită de următorul tabel de adevăr.

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Implicația **nu este o operație comutativă**, adică $A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$ și **nu este nici asociativă**, adică $(A \rightarrow B) \rightarrow C \neq A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Demonstrațiile se pot efectua cu ajutorul tabelor de adevăr, acestea vor fi probleme propuse la sfârșitul capitolului.

II. În clasa a noua am constatat că **reciproca propoziției** dacă A , atunci B este propoziția dacă B , atunci A . (Am schimbat între ele ipoteza și concluzia)

Dacă atât propoziția dată, cât și reciproca ei sunt adevărate, atunci **propoziția se numește reversibilă**.

Trebuie să acordăm o atenție deosebită acestei probleme, deoarece în mod formal se poate formula reciproca oricărei propoziții de tip **dacă A , atunci B** . În acest caz vom studia valoarea de adevăr a propoziției obținute și numai după aceea putem decide dacă propoziția dată este reversibilă sau nu.

În matematică au o importanță deosebită propozițiile reversibile.

În cursul studiilor noastre ne-am întâlnit cu foarte multe teoreme de acest fel. Pentru exemplificare, iată teorema lui Pitagora.

- Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci pătratul laturii celei mai lungi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi.

Teorema a fost demonstrată, deci propoziția este adevărată.

Vom găsi reciproca acestei propoziții dacă schimbăm între ele ipoteza și concluzia.

- Dacă într-un triunghi pătratul laturii celei mai lungi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Teorema a fost demonstrată, deci propoziția este adevărată.

În consecință este adevărată și propoziția următoare:

- Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci pătratul laturii celei mai lungi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi și dacă într-un triunghi pătratul laturii celei mai lungi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Această formulare este prea lungă, deci o putem simplifica:

- Un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă pătratul laturii celei mai lungi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi

De fapt este vorba despre conjuncția $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

În acest caz folosim expresia ... *dacă și numai dacă*...

Această operație logică se numește **echivalență**.

Echivalența

Propoziția A dacă și numai dacă B (sau conjuncția a două implicații formate din A și B) se numește echivalență.

Notăție: $A \leftrightarrow B$, sau $A \Leftrightarrow B$. (A dacă și numai dacă B)

În cazul când formulăm teoreme cu ajutorul echivalenței folosim și terminologia: A este condiția necesară și suficientă lui B , sau B este condiția necesară și suficientă lui A .

Pe baza definiției, tabelul de adevăr al echivalenței se prezintă în felul următor:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i

Sau mai concis:

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Tabelul de adevăr al echivalenței

Echivalența este o operație comutativă și asociativă, ceea ce se poate demonstra cu ajutorul tabelelor de adevăr.



Alte probleme:
Matematika gyakorló
és érettségire felkészítő
feladatgyűjtemény I.:
25–33.

Probleme

1. K2 Să se demonstreze că implicația
a) nu este comutativă;
b) nu este asociativă.

2. K2 Să se demonstreze identitățile
a) $A \rightarrow B = (\neg A) \vee B$;
b) $A \rightarrow B = \neg(A \wedge (\neg B))$.

3. K2 Să se arate că pentru orice propoziții A, B , valorile de adevăr ale propozițiilor $A \rightarrow B$ și $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$ sunt identice.

4. K2 Trei persoane spun câte o propoziție. Există printre ele propoziții echivalente?
Andrei: Nu plouă și plec de acasă cu umbrela.
Daniel: Dacă plouă, atunci voi pleca de acasă cu umbrela.
Robert: Nu plouă, sau plec de acasă cu umbrela.

5. Aplicații

După ce am studiat operațiile logice, cu ajutorul lor se poate preciza structura propozițiilor compuse, astfel se pot stabili mai ușor valorile de adevăr ale acestor propoziții.

Exemplul 1 Să se precizeze structura propoziției de mai jos.

Dacă suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9 și ultima cifră este divizibilă cu 5, atunci numărul dat este divizibil cu 45.

Soluție

Introducem notațiile:

A: Suma cifrelor unui număr natural este divizibilă cu 9.

B: Ultima cifră unui număr natural este divizibilă cu 5.

C: Un număr natural este divizibil cu 45.

Atunci structura propoziției noastre va fi: $(A \wedge B) \rightarrow C$.

Exemplul 2 Să se descompună propoziția compusă dată în propoziții simple, după care să se scrie această propoziție cu ajutorul operațiilor logice.

Dacă după masă voi învăța și nu dau drumul la calculator, atunci pot să-mi pregătesc pentru mâine tema de casă, și voi citi sau voi face jogging.

Soluție

Propozițiile simple care compun această propoziție compusă vor fi:

A: După masă învăț.

D: Citesc.

B: După masă dau drumul la calculator.

E: Fac jogging.

C: Îmi pregătesc tema de casă pentru mâine.