I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

A középkor végének Európájában egyre fontosabbá vált a hajózás, csillagászat, kereskedelem és az ipar fejlesztése. Ezt a felgyorsult fejlődést elsősorban műszaki és matematikai vívmányoknak köszönhették. A pénzforgalomban érdekelt szakemberek számára a kamatos kamat gyors kiszámítása érdekében táblázatokat készítettek. A megfeleltetést a görög logosz, arány és arithmosz, szám összevonásából latinosan logaritmusnak nevezték el.

VEGYES ALGEBRAFELADATOK (ISMÉTLÉS)

A 9. és 10. osztályban elsajátított algebrai módszerek és eszközök már sokféle feladat megoldását teszik lehetővé. Ismétlésképpen a hatványozás, gyökvonás és a nevezetes azonosságok témaköréből válogattunk össze néhány feladatot. Ezek megoldásához néha valamilyen ötlet kell – de a megoldás leírása elegánsan, néhány sorban megadható.

Az alábbi feladatsorban az $A, B, \ldots, F$ számértékeket kell meghatározni. Próbáljuk ügyes számolással, a számológép használata nélkül megoldani a feladatot!

1. példa (számválaszos verseny)

$A = 312\,421^2 + 212\,421^2 - 624\,842 \cdot 212\,421;$

$B = 777\,777\,778^2 - 222\,222\,223^2;$

$C = 444\,444\,445^2 + 111\,111\,111 - 444\,444\,444^2;$

$D = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{100}\right);$

$E = \dfrac{12\,343\,212\,345}{12\,343\,212\,346^2 - 12\,343\,212\,345 \cdot 12\,343\,212\,347};$

$F = \sqrt{10-4\sqrt{6}} - \sqrt{10+4\sqrt{6}}.$

Segítség:

A: Az $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$ azonosságot alkalmazhatjuk.

B: Segít az $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ azonosság.

C: Az $x^2 + y - z^2$ kifejezés tagjait érdemes $x^2 - z^2 + y$ sorrendbe csoportosítani.

D: Alakítsuk át a tényezőket közönséges törtté!

E: Legyen például $x = 12\,343\,212\,346$, ekkor a tört $\dfrac{x-1}{x^2-(x-1)(x+1)}$ alakú.

F: Észrevehetjük, hogy a két négyzetgyök alatt teljes négyzetek szerepelnek.

Eredmények:

$A = (312\,421 - 212\,421)^2 = 100\,000^2 = 10^{10}$.

$B = (777\,777\,778 + 222\,222\,223)(777\,777\,778 - 222\,222\,223) = 1\,000\,000\,001 \cdot 555\,555\,555 =$ $= (1\,000\,000\,000 + 1) \cdot 555\,555\,555 = 555\,555\,555\,000\,000\,000 + 555\,555\,555 = 555\,555\,555\,555\,555\,555$ (18 darab 5-ös).

$C = (444\,444\,445 + 444\,444\,444)(444\,444\,445 - 444\,444\,444) + 111\,111\,111 = 888\,888\,889 +$ $+ 111\,111\,111 = 1\,000\,000\,000 = 10^9$.

$D = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100} = \frac{101}{2}$. (A 3, 4, …, 100 tényezőkkel egyszerűsíthetünk.)

$x^2-(x-1)(x+1) = x^2-(x^2-1) = 1$, így a tört $E = \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{12\,343\,212\,345}{1}$ alakú.

F: $10-4\sqrt{6} = \left(\sqrt{6}-2\right)^2$ és $10+4\sqrt{6} = \left(\sqrt{6}+2\right)^2$, így

$F = \sqrt{\left(\sqrt{6}-2\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{6}+2\right)^2} = \left|\sqrt{6}-2\right| - \left|\sqrt{6}+2\right| = \sqrt{6}-2-\left(\sqrt{6}+2\right) = -4.$

Másképpen is eljárhatunk:

$F^2 = 10-4\sqrt{6}+10+4\sqrt{6}-2\sqrt{\left(10-4\sqrt{6}\right)\left(10+4\sqrt{6}\right)} = 20-2\sqrt{100-16\cdot 6} = 16$, s mivel $F < 0$, ebből $F = -4$ következik.

A következő két példa egy-egy matematikai alkalmazás. Most is először önállóan próbáljuk megoldani a feladatokat.

2. példa

Megfigyelhetjük, hogy
$11 - 2 = 3 \cdot 3;$
$1111 - 22 = 33 \cdot 33;$
$111\,111 - 222 = 333 \cdot 333.$
Vajon folytatódik ez a szabályosság?

Megoldás

Azt kell igazolnunk, hogy $\underbrace{11\ldots1}_{2k\text{ darab}} - \underbrace{22\ldots2}_{k\text{ darab}} = \underbrace{33\ldots3}_{k\text{ darab}} \cdot \underbrace{33\ldots3}_{k\text{ darab}}$ minden pozitív egész k számra teljesül. Helyettesítsük a k darab 1-esből álló $\underbrace{11\ldots1}_{k\text{ darab}}$ számot a-val! Ekkor az $\underbrace{11\ldots1}_{2k\text{ darab}}$ szám $a \cdot 10^k + a$, és az igazolandó állítás $a \cdot 10^k + a - 2a = 3a \cdot 3a$ alakú. Átrendezés és a-val való egyszerűsítés után $10^k - 1 = 9a$ egyenlet adódik, és ez minden fenti a-ra igaz: $10^k - 1$ éppen k darab 9-esből áll.

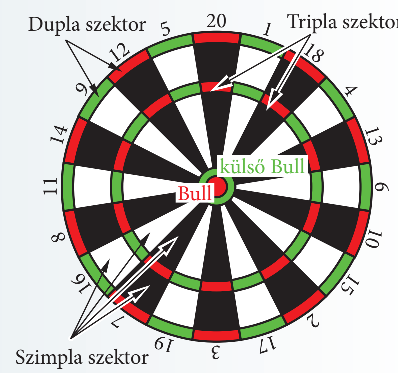
Az észrevett szabályosság tehát folytatódik.

3. példa

A darts nevű ügyességi játékban a céltábla egyes mezőire dobónyíllal célzunk. A megfelelő 1, 2, …, 20 mezőket eltalálva ennyi pontot ér egy-egy dobás. A külső vékony körgyűrűt eltalálva a dobásérték duplázódik, a beljebb lévő körgyűrű eltalálása pedig háromszorozza az értéket. Még két speciális mező van: a céltábla piros közepe (Bull) 50 pontot, a körülötte levő zöld külső Bull pedig 25 pontot ér.

Három dobásból legfeljebb 180 pont érhető el, ha három tripla 20-ast dob a játékos (T20 + T20 + T20 = 180).

Feladat: mutassuk meg, hogy a 173 pont nem érhető el három dobásból!



Megoldás

Ha az egyik dobás 50-es Bull (vagy kisebb értékű), akkor a maradék 123 pont túl sok, két dobásból nem érhető el. Minden dobásnak tehát 50-nél nagyobbnak, azaz triplának kell lennie.

De a tripla találatok, valamint összegük is mind oszthatók 3-mal, míg a 173-ra ez nem igaz. Ezért a 173 pont valóban nem állítható elő.

FELADATOK

1. K2 Mennyi az alábbi kifejezések kiszámított értékében a számjegyek összege?

a) $(10^{10})^5 - 7$; *b)* $10^{(10^5)} - 7$; *c)* $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2011\text{ darab}}$.

2. K2 Mennyi az $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ kifejezés pontos értéke?

(Segítség: gyöktelenítsük a törteket!)

1. EGÉSZKITEVŐJŰ HATVÁNYOK, AZONOSSÁGOK

Előző évi tanulmányainkban értelmeztük a valós számok egészkitevőjű hatványát. Természetes a kérdés: Bővíthető-e a hatványozás fogalma tetszőleges racionális, esetleg irracionális kitevőkre is? Ezt a kérdést fogjuk vizsgálni, előtte ismételjük át a hatványozás azonosságait.

1. Azonos alapú hatványok szorzata:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$

1. példa

$5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^{-6} = 5^{3+5-6} = 5^2;$

$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{7}\right)^{3-4} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5};$

$p^3 \cdot p^a \cdot p^{-b} = p^{3+a-b}.$

2. Szorzat hatványozása:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$

2. példa

$(2 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 7^3;$

$(k \cdot l \cdot n)^b = k^b \cdot l^b \cdot n^b.$

3. Azonos alapú hatványok hányadosa:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$

3. példa

$\frac{3^2}{3^{-1}} = 3^{2-(-1)} = 3^3;$

$\frac{a^5 \cdot a^2}{a^4} = a^{5+2-4} = a^3, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0.$

4. Tört (hányados) hatványozása:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$

4. példa

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{3^{-2}} = \frac{9}{16}.$$

5. Hatvány hatványozása:
$(a^n)^m = a^{n\cdot m}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$

5. példa

$$(7^2)^{-3} = 7^{-6} = \frac{1}{7^6};$$

$$\left(\frac{k^{-2}}{l^5}\right)^{-3} = \frac{k^6}{l^{-15}}, \quad k, l \in \mathbf{R}, k \neq 0, l \neq 0.$$

Nézzünk néhány példát az azonosságok összetett használatára, ezek segítségével kifejezések egyszerűbb alakját keressük.

6. példa

Határozzuk meg az $\frac{1}{5}a^{-2}b^4a^3b^{-3}$ kifejezés értékét, ha $a = -\frac{1}{8}$, $b = 8$!

Megoldás

$$\frac{1}{5}a^{-2}b^4a^3b^{-3} = \frac{1}{5}ab = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 8 = \left(-\frac{1}{5}\right).$$

7. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

a) $\frac{m^3\cdot n^{-2}}{m\cdot n^{-1}}\cdot\left(\frac{n^5}{m^{-3}}\right)^4 : (m^7\cdot n^{-2})^{-4}, \quad m, n \in \mathbf{R}, mn \neq 0;$

b) $pq(p^{-1}+q^{-1})(q^2-p^2)^{-1}$, $p, q \in \mathbf{R}$, $pq \neq 0$, $q \neq p$.

Fogalmak
a hatványozás azonosságai.

Megoldás

a) $$\frac{m^3\cdot n^{-2}}{m\cdot n^{-1}}\cdot\left(\frac{n^5}{m^{-3}}\right)^4 : (m^7\cdot n^{-2})^{-4} = m^2\cdot n^{-1}\cdot n^{20}\cdot m^{12}\cdot m^{28}\cdot n^{-8} = m^{42}\cdot n^{11};$$

b) $$pq(p^{-1}+q^{-1})(q^2-p^2)^{-1} = pq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q^2-p^2}\right) = (q+p)\left(\frac{1}{(q+p)(q-p)}\right) = \frac{1}{q-p}.$$

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

a) 2^8, -2^8, $(-2)^8$;

b) $(3^5 \cdot 3^6):3^9$;

c) $\dfrac{5^8 \cdot 5^{22}}{25 \cdot (5^2)^{15}}$;

d) $\dfrac{(7^4)^3 \cdot 49^5}{(7^3)^7 \cdot 7}$;

e) $\dfrac{2^5 + 2^6 + 2^7}{14 \cdot 2^6}$;

f) $\dfrac{4^4}{2^7 + 2^8}$.

2. K1 Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi egyenlőségek! Ahol az egyenlőség nem igaz, javítsuk ki úgy, hogy igaz legyen!

a) $5 \cdot 5^{41} = 25^{41}$;

b) $9 \cdot 3^{24} = 3^{26}$;

c) $(9 \cdot 3)^{24} = 27^{26}$;

d) $8^{40} = 4^{80}$;

e) $2^{40} \cdot 4^{40} = 8^{80}$;

f) $2^{40} \cdot 4^{40} = 8^{40}$.

3. K1 Írjuk fel egyetlen hatványként az alábbi műveletek eredményét!

a) $\dfrac{12^{40} \cdot 9^2 \cdot 8^3}{3^2 \cdot (6^7)^6}$;

b) $\dfrac{25^2 \cdot 3^{18} \cdot 8^{10}}{15^4 \cdot 12^{15}}$.

4. K1 Írjuk fel negatív kitevő nélkül az alábbi hatványokat!

a) 2^{-3}; *b)* 3^{-5}; *c)* $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$; *d)* $\dfrac{1}{2^{-1}}$; *e)* $\dfrac{5^{-2}}{4}$.

5. K1 Írjuk fel egyetlen hatványként az alábbi kifejezéseket!

a) $(a^5 \cdot a^6) \cdot (a^9)^3$;

b) $\dfrac{x^8 \cdot x^{22}}{x^2 \cdot (x^2)^{15}}$;

c) $\dfrac{(y^4)^3 \cdot (y^5)^4}{(y^3)^7 \cdot y}$;

d) $\dfrac{x^3 \cdot x^{-5} \cdot (x^{-2})^4}{x^{10}}$;

e) $\dfrac{(y^{-5})^4 \cdot (y^{11})^4}{(y^{-6})^7 \cdot y^9}$.

6. K2 Írjuk egyszerűbb alakba az alábbi kifejezéseket!

a) $\dfrac{a^3 \cdot b^{-2}}{b \cdot a^{-1}} \cdot \left(\dfrac{a^5}{b^{-3}}\right)^3 : (a^8 \cdot b^{-3})^{-4}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b \neq 0$;

b) $\dfrac{a^6 + a^7 + a^8}{a^7} \cdot \dfrac{a^{10}}{a^2 + a + 1}$.

Franciaországban 1795-ben elfogadott prefixumok:

A prefixum neve	A prefixum értéke	A prefixum jele	A prefixum eredete	A prefixum jelentése
kilo	10^3	k	görög	„ezer”
hekto	10^2	h	görög	„száz”
deka	10^1	da	görög	„tíz”
deci	10^{-1}	d	latin	„tized”
centi	10^{-2}	c	latin	„század”
milli	10^{-3}	m	latin	„ezred”

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 816–825, 827–828, 834–840.

2. AZ *n*-EDIK GYÖK ÉS AZONOSSÁGAI

Ismételjük át az n-edik gyök fogalmát és azonosságait!

Definíció

Az $\sqrt[n]{a}$ definíciója:

1. eset

Ha n pozitív páros szám, azaz $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^+$, akkor az a nemnegatív szám $2k$-adik gyökén azt a nemnegatív számot értjük, melynek $2k$-adik hatványa a.

$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, ahol $a \geq 0$, és $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^+$.

2. eset

Ha $n \geq 3$ pozitív páratlan szám, azaz $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}^+$, akkor az a valós szám $(2k + 1)$-edik gyökén azt a valós számot értjük, melynek $(2k + 1)$-edik hatványa a.

$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, ahol $a \in \mathbf{R}$, és $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}^+$.

Megjegyzés

Nemnegatív valós szám n-edik gyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, melynek n-edik hatványa az x számmal egyezik meg, ahol $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

A definíció szerint: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, $x \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

A TANULT AZONOSSÁGOK

I. Szorzat *n*-edik gyöke egyenlő a tényezők *n*-edik gyökének szorzatával.

Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, és $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

(Ha n páratlan, a és b negatív is lehet.)

1. példa

$\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^4} = 3;$

$\sqrt[5]{-8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

II. Tört (hányados) *n*-edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező *n*-edik gyökének hányadosával.

Ha $a \geq 0$, $b > 0$, és $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

2. példa

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}$;

$\sqrt[6]{-\frac{64}{3}}$ nem értelmezett, mert $-\frac{64}{3} < 0$.

III. Egy nemnegatív valós szám *n*-edik gyökének *k*-adik, egészkitevőjű hatványa egyenlő a szám ugyanazon kitevőjű hatványának *n*-edik gyökével.

Ha $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, és $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

3. példa

$\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = \sqrt[3]{4^3} = 4$;

$\left(a\sqrt[5]{a}\right)^5 = a^5 \cdot \left(\sqrt[5]{a}\right)^5 = a^5 \cdot \sqrt[5]{a^5} = a^5 \cdot a = a^6$.

IV. Az *n*-edik gyök *k*-adik gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyök alatti kifejezés (*n* · *k*)-adik gyökét vesszük.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, és $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.

4. példa

Ha a, b pozitív valós számok:

$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} \left(= \sqrt[3]{a}\right)$;

$\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}\sqrt{ab}}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}ab}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^3}{a}}} = \sqrt[24]{\frac{a^6}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a}} = \sqrt[24]{\frac{a^5}{b^3}}$.

V. Hatvány alakú kifejezés gyökénél a hatványkitevő és a gyökkitevő egyszerűsíthető, bővíthető.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbf{Z}$, akkor $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$.

5. példa

$\sqrt[18]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^5}$;

$\left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt[12]{64} - \sqrt[12]{27}\right)\left(\sqrt[12]{16} + \sqrt[12]{729}\right) =$

$= \sqrt[12]{1024} + \sqrt[12]{46\,656} - \sqrt[12]{432} - \sqrt[12]{19\,683}$.

Fogalmak
gyökvonás;
n-edik gyök.

FELADATOK

1. K1 Döntsük el, hogy melyik szám nagyobb!

a) $\sqrt{5}$ vagy $\sqrt[3]{5}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ vagy $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

c) $\sqrt{0{,}1}$ vagy $\sqrt[3]{0{,}1}$;

d) $\sqrt[3]{7}$ vagy $\sqrt[5]{6}$.

2. K2 Állítsuk nagyság szerint csökkenő sorrendbe az alábbi számokat!

$\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[6]{10}$.

3. K2 Számítsuk ki az alábbi gyökök értékét!

a) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{36}$;

b) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{2^2}$;

c) $\sqrt[7]{1024}\cdot\sqrt[7]{4^2}$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{1296}}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{12}}}$;

e) $\dfrac{\sqrt[4]{10^3}\cdot\sqrt{0{,}1}}{\sqrt[4]{0{,}01}}$.

4. K2 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}}$;

b) $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2^3}}$;

c) $\left(\sqrt{\sqrt[5]{\frac{1}{3}}}\right)^5\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3^3}}$.

5. K2 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi műveletek eredményét!

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}$;

b) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[5]{125\cdot\sqrt[4]{5}}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{6}}}$;

e) $\sqrt{a^3\sqrt{a\cdot\sqrt[4]{a^2}}}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 895–900, 902–911, 916–919.

3. RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNY, PERMANENCIAELV

Az előzőekben az egészkitevőjű hatványokat értelmeztük, a hatványozás és az *n*-edik gyök azonosságait ismételtük át. Nyilvánvalóan felmerül a kérdés, kiterjeszthető-e a hatványozás fogalma tetszőleges racionális kitevőkre. Ha ez lehetséges, akkor úgy járjunk el, hogy az eddig megismert azonosságok érvényben maradjanak. Ezt az igényt fejezi ki a **permanenciaelv**.

Vegyük figyelembe a következő azonosságot:
$(a^k)^l = a^{kl}$, ahol $k, l \in \mathbf{Z}$.

Tehát ha racionális kitevőre szeretnénk értelmezni a hatványozást, akkor legyen igaz:
$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$, ahol $a \neq 0, n \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}$.

Ha mindkét oldalból *n-edik* gyököt vonunk:
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
Még vizsgáljuk meg, hogy ha ezt az összefüggést definíciónak fogadjuk el, akkor az értelmezési tartomány milyen alap esetén felel meg elvárásainknak. Három probléma merülhet fel.

1. probléma
Ha az alap negatív szám, akkor ellentmondásra juthatnánk, például:
$(-3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-3)^3}$ nem értelmezhető a valós számok halmazán, *ezért a negatív alapot ki kell zárnunk*.

2. probléma
Ha $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$, akkor $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k}{l}}$ teljesül-e?
Az igazoláshoz alakítsuk át a feltételt.
Ha $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$, akkor $m \cdot l = k \cdot n$.
Induljunk ki az igazolandó egyenlőség bal oldalából.
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nl]{a^{ml}} = \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[l]{a^k} = a^{\frac{k}{l}}$.
Az egyenlőségsorozat harmadik lépésénél használtuk ki a feltételt, és igazoltuk az állítást, azaz a *törtkitevő más alakban történő felírásától nem függ a hatvány értéke.*

(Negatív alap esetén ez sem teljesülne: $(-3)^{\frac{3}{4}} \neq (-3)^{\frac{6}{8}}$.)

3. probléma
A permanenciaelv vizsgálata:
Bizonyítható, hogy a hatványozás azonosságai is érvényben maradnak.
Példaként vizsgáljuk meg, hogy az $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$ azonosság érvényes-e!

Egyrészt: $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{ln}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}}$.

Másrészt: $a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}}$.

Az egyenlőségek jobb oldalai megegyeznek, tehát a bal oldalak is egyenlők.

Ezzel *beláttuk, hogy a régebben ismert* $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$ *azonosság érvényben maradt.* Hasonlóan igazolható a többi azonosság megmaradása is.

Definíció

Egy tetszőleges pozitív x szám $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$**-edik hatványa** az x szám m-edik hatványából vont n-edik gyök, azaz

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \text{ ahol } x > 0,\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N},\ n \neq 0,\ n \neq 1.$$

1. példa

Számítsuk ki a következő hatványok pontos értékét!

a) $8^{\frac{1}{3}}$; *b)* $0^{\frac{3}{4}}$; *c)* $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$; *d)* $0{,}01^{-2{,}5}$; *e)* $625^{\frac{4}{3}}$.

Megoldás

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$; *b)* $0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = 0$;

c) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{81}{16}\right)^5} = \sqrt[4]{\frac{3^{20}}{2^{20}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$;

d) $0{,}01^{-2{,}5} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{5}{2}} = \sqrt{100^5} = 10^5 = 100\,000$;

e) $625^{\frac{4}{3}} = (5^4)^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5^{16}} = 5^5 \cdot \sqrt[3]{5}$.

2. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket!

a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} \cdot \sqrt[3]{2^2}$; *b)* $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3}$.

Megoldás

a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{-\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{-4+2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$, ha $a > 0$.

3. példa

Végezzük el a műveleteket, a hatványok alapja pozitív valós szám!

a) $\left(a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$; *b)* $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$.

Megoldás

a) $\left(a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{21}}b^{\frac{2}{15}}=a^{\frac{20}{105}}b^{\frac{14}{105}}=\sqrt[105]{a^{20}b^{14}}$;

b) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}=a^{\frac{2}{3}}+2(ab)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}+2\cdot\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

Fogalmak
permanenciaelv;
racionális kitevőjű hatványozás.

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

a) $32^{\frac{1}{5}}$; *b)* $0^{\frac{2}{5}}$; *c)* $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}}$; *d)* $0{,}00001^{-3{,}5}$; *e)* $1331^{\frac{2}{3}}$;

f) $16^{0{,}75}$; *g)* $32^{-0{,}4}$; *h)* $27^{-\frac{10}{6}}$; *i)* $\left(\frac{1}{81}\right)^{-6{,}5}$; *j)* $0{,}36^{-\frac{5}{2}}$.

2. K1 Írjuk át az alábbi kifejezéseket gyökös alakba!

a) $5^{\frac{1}{3}}$; *b)* $10^{\frac{3}{4}}$; *c)* $7^{-\frac{5}{4}}$; *d)* $6^{-2{,}5}$; *e)* $13^{\frac{4}{3}}$.

3. K2 Írjuk át az alábbi kifejezéseket egyetlen szám hatványaként!

a) $\sqrt[4]{8}$; *b)* $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$; *c)* $\sqrt[3]{25}\cdot 5^{\frac{2}{3}}$; *d)* $8^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[5]{2^8}\cdot\sqrt[3]{16}$.

4. K2 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi műveletek eredményét!

a) $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}\cdot\sqrt[3]{3^2}$; *b)* $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}$; *c)* $\sqrt[5]{a}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-5}\cdot\sqrt[3]{a^4}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[4]{b^2}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt[6]{b}\right)^5}$.

5. K2 Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(2^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; *b)* $\dfrac{5^{3{,}2}\cdot 4^{\frac{21}{10}}}{10^{\frac{26}{5}}}$; *c)* $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$.

6. K2 Írjuk a lehető legegyszerűbb alakba az alábbi kifejezéseket!

a) $a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{(a+b)^{-1}}$; *b)* $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\cdot\dfrac{ab}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 927–937.

4. AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

Az előző leckében értelmeztük a pozitív alapú, racionális kitevőjű hatványt. Magasabb matematikai módszerekkel bizonyítható, hogy az értelmezés kiterjeszthető irracionális kitevőkre is. Ez a kiterjesztés, a permanenciaelvnek megfelelően, megtartja az eddig megismert hatványozásazonosságokat, valamint teljesül a **következő tulajdonság**:

– ha $a > 1$ valós szám, p, r racionális számok, q irracionális szám és $p < q < r$, akkor $a^p < a^q < a^r$;
– ha $0 < a < 1$ valós szám, p, r racionális számok, q irracionális szám és $p < q < r$, akkor $a^p > a^q > a^r$.

Az exponenciális kifejezések vizsgálatát, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását segíti, ha megismerjük az exponenciális függvényeket és legfontosabb tulajdonságaikat.

Definíció

Azokat a függvényeket, amelyekben a változó a kitevőben szerepel, **exponenciális függvényeknek** nevezzük. Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$, ahol $a > 0$ függvény az $\boldsymbol{a}$ alapú exponenciális függvény.

Vizsgáljuk meg az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ függvényt, ahol $a > 0$!

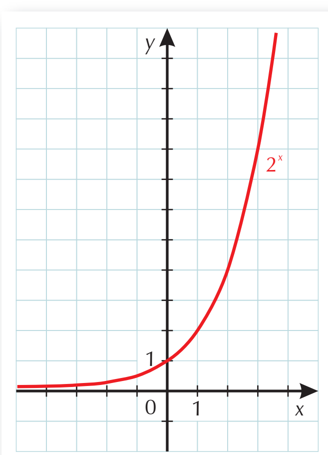
Tekintsük először az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = 2^x$ függvényt.

(Legegyszerűbben úgy fogalmazhatnánk, hogy a vizsgált exponenciális függvény „állandó mértékben többszöröződik”, például egy baktériumkultúra, amely „minden órában megduplázódik”.)

Az egész-, illetve a racionális kitevőjű hatvány értelmezése, tulajdonságai alapján kijelenthetjük, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő.

A bevezetőben említettük, hogy bizonyítható, hogy ha az értelmezési tartományt kiterjesztjük a valós számok halmazára, akkor a függvény monotonitása nem változik.

A függvény grafikonja:



A függvény legfontosabb **tulajdonságai**:

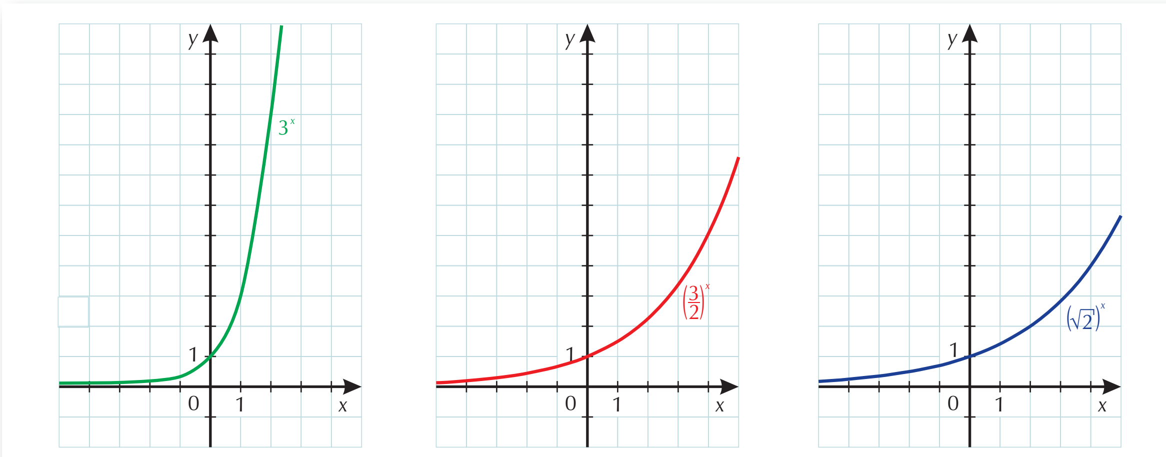
1. $D_f = \mathbf{R}$.
2. $R_f = \mathbf{R}^+$ (minden pozitív értéket felvesz).
3. Szigorúan monoton növekvő.
4. Zérushelye nincs.
5. Az ordinátatengelyt a grafikon a (0; 1) pontban metszi.

Felmerül a kérdés: Milyen lényeges tulajdonságok változnak meg, ha az alapot módosítjuk?

1. eset

Legyen az alap: $a > 1$. Tekintsük a következő függvényeket:

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ f(x) = 3^x;$ $\qquad g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x;$ $\qquad h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ h(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x.$



Megállapíthatjuk, hogy az előző tulajdonságok mindegyike érvényes ezekre a függvényekre is.

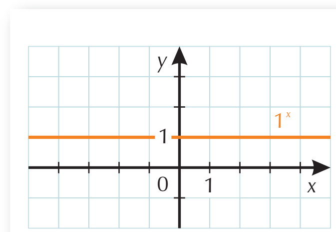
2. eset

Legyen az alap: $a = 1$;

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ f(x) = 1^x.$

Ebben az esetben a függvény konstans függvény, grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.

(Megjegyzés: Sok esetben az $a = 1$ alapot nem engedik meg.)



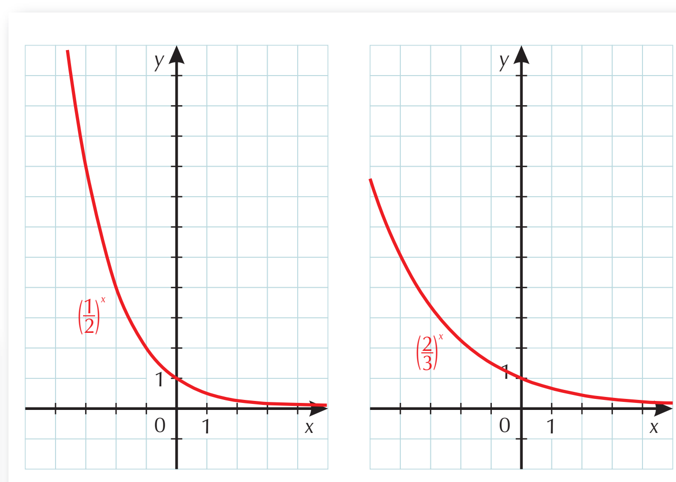
3. eset

Legyen az alap $0 < a < 1$. Tekintsük a következő függvényeket:

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x.$

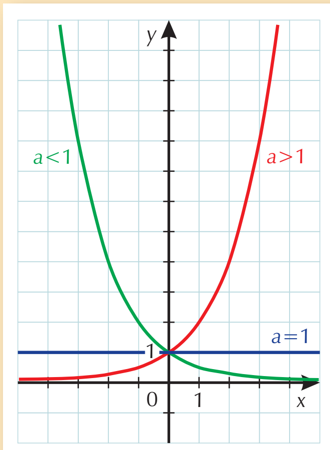
Látható, hogy lényeges változás csak a monotonitásban történt!



Tulajdonságok:

1. $D_f = \mathbf{R}$.
2. $R_f = \mathbf{R}^+$, azaz csak pozitív értékeket vesz fel.
3. Szigorúan monoton csökkenő.
4. Zérushelye nincs.
5. Az ordinátatengelyt a grafikon a $(0;1)$ pontban metszi.

Összegezzük megfigyeléseinket!
(Természetesen ezek a tulajdonságok magasabb matematikai módszerekkel bizonyíthatók.)



Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ függvényt, ahol $a > 0$, **exponenciális függvénynek** nevezzük. A függvény **legfontosabb tulajdonságai**:

Ha az alap $a = 1$, akkor a függvény konstans függvény.

Ha az alap $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Ha az alap $a > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.

Mindhárom függvény csak pozitív értékeket vesz fel és minden pozitív értéket felvesz, valamint az ordinátatengelyt a $(0; 1)$ pontban metszi.

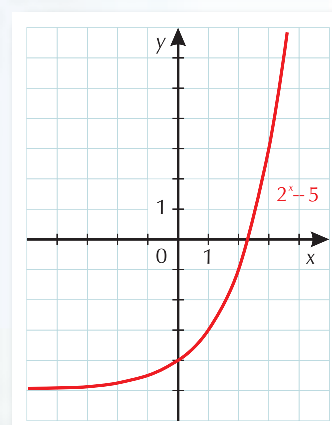
1. példa

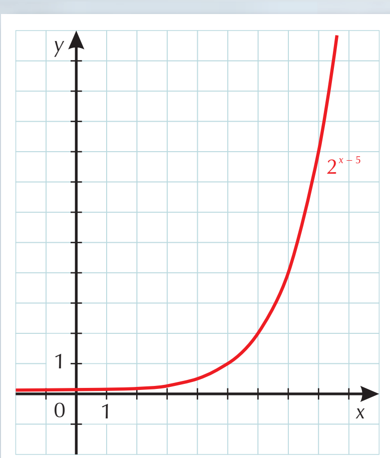
Ábrázoljuk és jellemezzük a függvényeket!

a) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 5$; *b)* g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = 2^{x-5}$; *c)* h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $h(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Megoldás

a) Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 5$ szigorúan monoton növekvő, mert az alap 1-nél nagyobb. A függvény grafikonja eltolással kapható a k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $k(x) = 2^x$ függvény grafikonjából, az eltolás vektora: $\underline{v}(0; -5)$.





b) A g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = 2^{x-5}$ szigorúan monoton növekvő, mert az alap 1-nél nagyobb. A függvény grafikonja eltolással kapható a k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $k(x) = 2^x$ függvény grafikonjából, az eltolás vektora: $\underline{v}(5; 0)$.