Matematika

MÁSODIK KÖTET

10.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Segítségképpen a kötet elején újból bemutatjuk, milyen típusú részekből épül fel a tankönyv.

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük. A Ⓚ jel arra utal, hogy a feladat megoldásához nemcsak matematikai tudás szükséges, hanem többféle szempontú elemzés és probléma megoldás. Ezek az úgynevezett kompetencia feladatok.

CSOPORTMUNKA: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS: Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

6. Vektorok és a hasonlóság

- TÖBB HATÁS EGY IDŐBEN
  - Hogyan száll le a repülő?
- PÁRHUZAMOS EGYENESEK, ÉS A KÖZÉJÜK ESŐ SZAKASZOK
- NEMCSAK HASONLÍT, DE HASONLÓ
  - Fényképek és tervrajzok
- SZÖGMÉRÉS ÚJ EGYSÉGGEL

7. Szögfüggvények

- DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK, NEMCSAK NEVEZETES SZÖGEKKEL
  - Milyen meredek? Milyen magas? Mekkora palló kell?
- SZÁMOLJUNK HOSSZÚSÁGOT, TERÜLETET!
  - Mérések a távolból: milyen magas a torony? Milyen messze van a hajó?

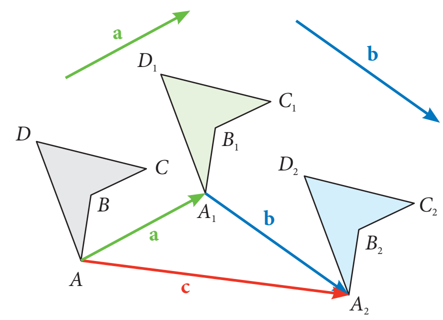
8. Egyenlőtlenségek, egyenletek, egyenletrendszerek

- EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKONOKKAL ÉS ALGEBRAI MEGKÖZELÍTÉSSEL
  - Amikor intervallum jelenti a megoldást.
- KÉT EGYENLET, KÉT ISMERETLEN
  - Amikor számpárok jelentik a megoldást.
- SZÖVEGES FELADATOK
  - Területekről, számokról, vásárlásról…

46 KÉT VEKTOR HELYETT EGY

BEVEZETŐ

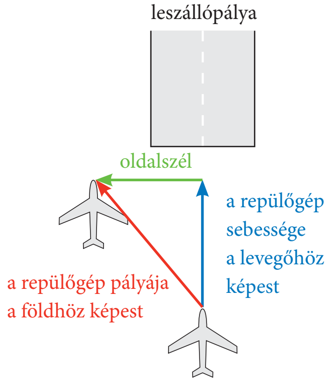
Toljuk el az $ABCD$ négyszöget először az $\mathbf{a}$ vektorral, az így kapott négyszöget pedig a $\mathbf{b}$ vektorral. A második eltolás után az $A_2B_2C_2D_2$ négyszöget kapjuk. Adjuk meg annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amelyik az $ABCD$ négyszöget az $A_2B_2C_2D_2$ négyszögbe viszi át!

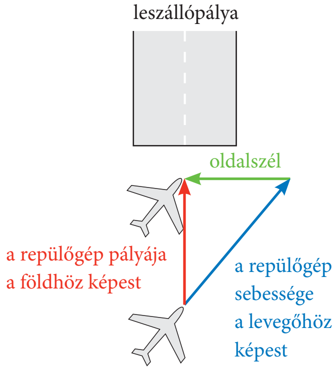


Megoldás
Az ábráról könnyen leolvasható, hogy az $ABCD$ négyszög valóban egyetlen eltolással is átvihető az $A_2B_2C_2D_2$ négyszögbe (mert megfelelő oldalaik párhuzamosak és egyenlő hosszúak), az eltolás vektora pedig a $\mathbf{c}$.

Az eltolás tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

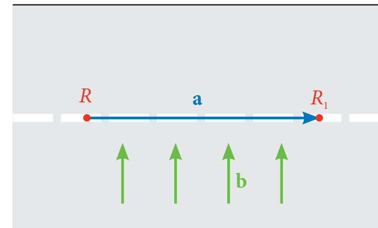
KIDOLGOZOTT FELADAT



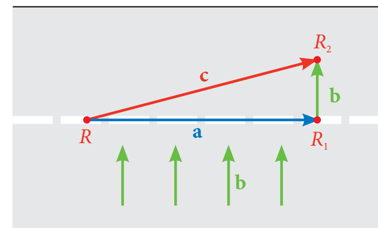


Idézet egy internetes cikkből: „A repülőterek tervezésénél a fő szempont az uralkodó szélirány, mivel az akár 4 km hosszú pályákat úgy kell megépíteni, hogy azok lehetőleg az ott leggyakrabban jellemző szél irányában legyenek használhatóak. […]
Ha a szél nem pontosan pályairányból fúj, vagyis „oldalas", akkor pályairányra merőleges komponense is van. Ilyenkor a repülőgép oldalirányban lesodródna a pálya tengelyvonalából (bal oldali felső ábra), amit a pilótának meg kell előznie. … A nagygépes repülésre jellemző módszer a szélre való „rátartás". Ilyenkor a repülőgép tengelyvonala nem párhuzamos a pályával, vagyis a földről szemlélve olyan, mintha oldalazva, csúszva repülne. Ilyenkor a gép orra kissé a szél felé mutat (bal oldali alsó ábra és az alábbi fénykép)."

Az ábrán az **a** vektor azt mutatja meg, hogy a vízszintesen repülő, leszálláshoz készülődő repülőgép egy másodperc alatt hogyan mozdul el a leszállópályához képest szélcsend esetén. (A szaggatott fehér vonal a leszállópálya középvonala.)
Egy leszállásnál jobbról erős keresztirányú szél fúj, amely egy másodperc alatt a **b** vektorral mozdítja el a repülőgépet.
Ha a repülőgép pilótája nem változtatna a szélcsendben megszokott leszállási folyamaton, akkor az eredetileg az R pontban lévő repülő hová kerülne egy másodperc alatt az R_1 helyett?



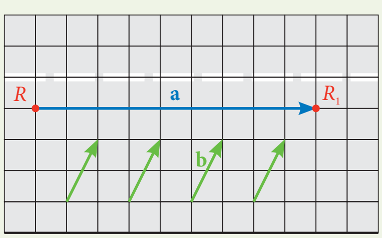
Megoldás
A repülőgép elmozdulását a gép motorja és az oldalszél együttesen alakítja. A gép egy másodperc alatti elmozdulását a **c** vektorral szemléltethetjük. A repülőgép tehát az oldalszél hatására az R_1 helyett az R_2 helyre jutna a pilóta közbeavatkozása nélkül. (A gép rövid idő alatt elsodródna a leszállópályától.)



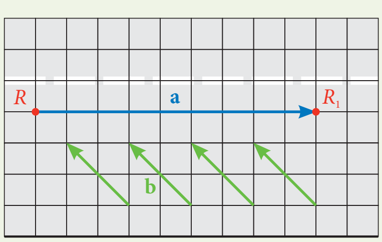
FELADAT

1. Határozd meg a füzetedben, hogy különböző szélirányok és szélerősségek esetén hová kerül az eredetileg az R helyen lévő repülőgép a szélcsendben „szokásos” R_1 helyett! (A megadott vektorok jelentése ugyanaz, mint a példában.)

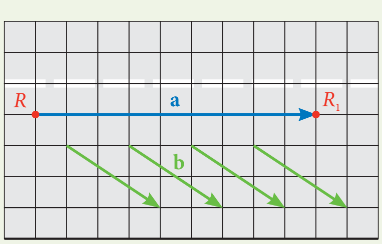
a)



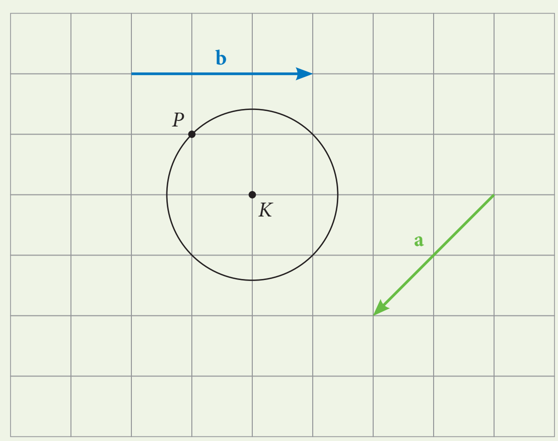
b)



c)



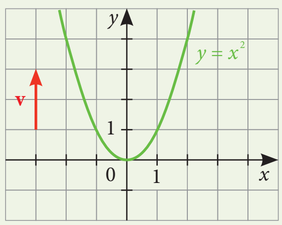
2. Told el a megadott kört először az **a** vektorral, majd az eltolás után kapott kört told el a **b** vektorral! A füzetedben dolgozz!



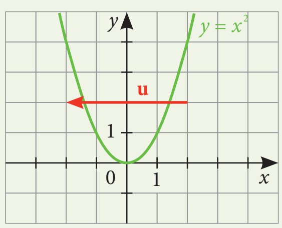
a) Jelöld meg a K és a P pont eltolásokkal kapott két-két képét!
b) Add meg azt az egyetlen eltolást, amely az eredeti kört a második eltolással kapott körbe viszi! Ennek a vektorát jelöld **c**-vel!
c) Más vektort kapunk-e, ha először a **b** vektorú, majd az **a** vektorú eltolást hajtjuk végre?
d) A négyzetrács legkisebb négyzetének oldala 1 egység hosszúságú. Mekkora az **a**, a **b** és a **c** vektor hossza?

3 Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját told el a megadott vektorral, rajzold meg az eltolással kapott grafikont a füzetedben! Melyik függvény grafikonját kaptad meg?

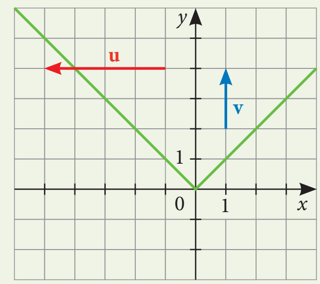
a)



b)



4 Az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját told el először az **u** vektorral, majd az eltolással kapott grafikont told el a **v** vektorral! A füzetedben dolgozz!



a) Add meg az eltolással kapott grafikonokhoz tartozó függvényeket!

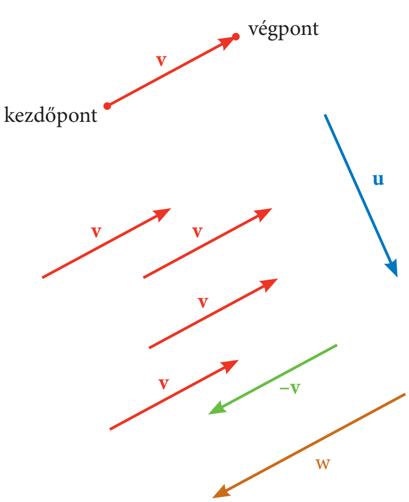
b) Add meg annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely az eredeti függvény grafikonját a második eltolás után kapott grafikonba viszi át!

c) Cseréld fel a két eltolás sorrendjét (először a **v** vektorral, majd az eltolással kapott grafikont az **u** vektorral told el), és ismét add meg a kapott grafikonokhoz tartozó függvényeket!

d) Rajzold meg annak az eltolásnak a vektorát, amelyik az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját az $x \mapsto |x+2| - 3$ függvény grafikonjába viszi át!

ELMÉLET

1. A **vektort** *alapfogalomnak* tekintjük, nem adunk rá meghatározást, legfeljebb azt mondhatjuk rá (körülírásként), hogy ez egy *irányított szakasz.*
A vektort az *állása*, az *iránya* és az *abszolút értéke* (hossza) jellemzi. A vektor *állása* azt jelenti, hogy melyik egyenesekkel párhuzamos. Egy álláson belül kétféle *irány* lehetséges, az irányt mutatja a nyíl hegye. A vektor kezdőpontjának és végpontjának a távolságát a vektor *hosszúságának* vagy a vektor *abszolút értékének* nevezzük.



2. Ha két vektor állása ugyanaz, akkor ezeket *egyállású* (*párhuzamos*) vektoroknak nevezzük. Ha két vektor állása merőleges, akkor a két vektort is *merőlegesnek* mondjuk. Az **a** vektor hosszának jele: $|\mathbf{a}|$.

3. Két vektort *egyenlőnek* mondunk, ha ugyanaz az állásuk is, irányuk is, abszolút értékük is. Egyenlő vektorok ugyanazt az eltolást hozzák létre.

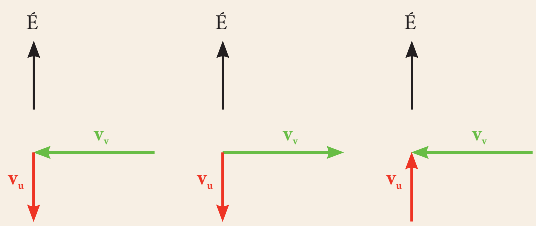
(Az ábrán a piros vektorok mind egyenlők; az **u** és a **v** különböző állású; a **v** és **w** azonos állású.)

4. Két vektor egymás *ellentettje*, ha ugyanaz az állásuk és az abszolút értékük, az irányuk pedig ellentétes. Egy **v**-vel jelölt vektor ellentettjének a jele: $-\mathbf{v}$.
A $-\mathbf{v}$ ellentettje a **v**.

HÁZI FELADAT

1 Egy lassan haladó vonat nyugatról kelet felé mozog, másodpercenként 2 métert tesz meg. Az egyik kocsiban egy utas „keresztbe” átsétál a vonat egyik oldaláról a másik oldalára, a pontosan szemben lévő helyre. Egy másodperc alatt az utas 1,5 métert tesz meg a kocsiban.

a) Válaszd ki a három ábra közül azt, amelyik a leírt történéshez tartozhat!



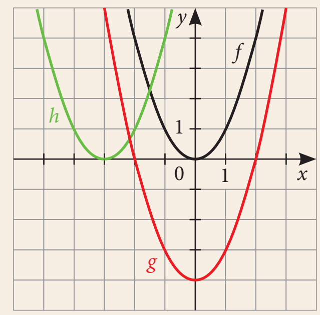
b) Mekkora utat tesz meg egy másodperc alatt az utas a vasúti sínekhez képest?

2 Rajzold meg a füzetedben annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely

a) a g jelű grafikont az f jelűbe,

b) az f jelű grafikont a h jelűbe,

c) a g jelű grafikont a h jelűbe viszi át!



3 Hány olyan különböző eltolás adható meg, amely az f, g, h jelű grafikonok közül valamelyik kettőt egymásba viszi át? Add meg mindegyiket egy-egy vektorral! A füzetedben dolgozz!

RÁADÁS

1 Adj meg olyan eltolást, amely a koordináta-rendszerben az $x \mapsto |x+3| - 4$ függvény grafikonját az $x \mapsto |x+1| + 5$ függvény grafikonjába viszi át!

2 Egy merőleges útkereszteződés felé közeledik két jármű. Az autóbusz délről észak felé halad, sebessége 55 $\frac{km}{h}$. A személyautó keletről nyugat felé halad, és sebessége 70 $\frac{km}{h}$.

a) Készíts ábrát!

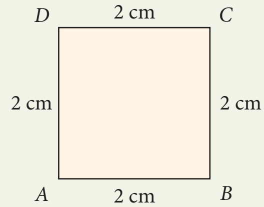
b) A buszsofőrhöz viszonyítva milyen irányú, és mekkora sebességgel „mozog” a kereszteződés?

c) A buszsofőrhöz viszonyítva milyen irányú, és mekkora sebességgel halad az autó?

47 VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

FELADAT

1 Hasonlítsd össze azokat a vektorokat, amelyek a 2 cm oldalú *ABCD* négyzet valamelyik csúcsából a négyzet egy másik csúcsába vezetnek!

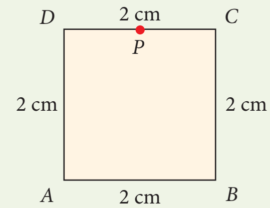


a) Hány ilyen vektor van?

b) Közülük hány vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ abszolút értékével? Melyik egyállású az $\overrightarrow{AB}$ vektorral?

c) Melyik vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AC}$ abszolút értékével? Közülük melyik egyállású az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, és melyik merőleges rá?

2 Jelölje *P* a *DC* oldal felezőpontját!



a) Told el *P*-t az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, majd a *P* képét az $\overrightarrow{AD}$ vektorral! A két eltolás után kapott pontot jelöljük *Q*-val! Mekkora a *PQ* távolság?

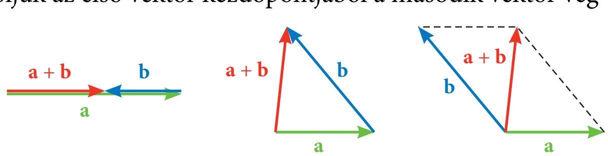
b) Told el *P*-t az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, majd a *P* képét a $\overrightarrow{CD}$ vektorral! A két eltolás után kapott pontot jelöljük *R*-rel! Mekkora a *PR* távolság?

ELMÉLET

Két vektor összeadása

Ha egy vektor ugyanazt az eltolást hozza létre, mint az **a** vektorral és **b** vektorral való eltolás egymásutánja, akkor ezt a vektort az **a** és a **b** vektor *összegének* nevezzük. *Jele*: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Két vektor összegvektorát úgy szerkesztjük meg, hogy egymáshoz csatlakozva mérjük fel a vektorokat (a második vektor kezdőpontja legyen az első vektor végpontjában), és megrajzoljuk az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektort. Ha a két „összeadandó” nem egyállású, akkor a *paralelogramma-szabállyal* is megkaphatjuk az összegvektort. Ezt mutatja a harmadik ábra.



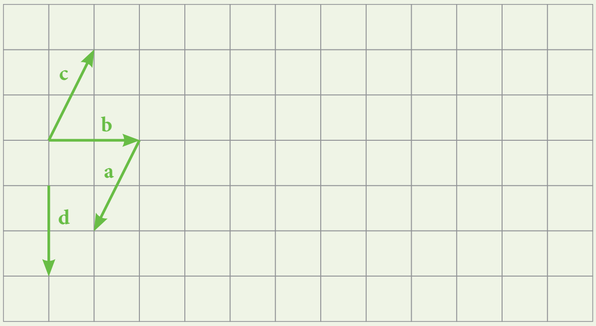
Kiegészítések

– Ha két ellentett vektort adunk össze, akkor az összegvektor kezdőpontja és végpontja egybeesik, vagyis 0 az összegvektor hosszúsága. A nulla hosszúságú vektort **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor jele írásban $\underline{0}$, nyomtatásban **0**.

– A **két vektor összeadásának** nevezett műveletnek nincs semmi köze a **két szám összeadásakor** megismert művelethez. Két vektor összeadásakor „semmi sem adódik össze” a szó „hagyományos” értelmében. Sem a vektorok hosssza (kivéve az egyirányú vektorok esetét), sem pedig az iránya (ezt egyébként sem tudnánk értelmezni…). A most definiált művelet nevét (és a jelét is) a matematikusok „kényelmességének” köszönhetjük.
A fizikában két vektor összege helyett a **két vektor eredője** elnevezés (is) használatos, de a művelet jele itt is a valós számoknál használt + szimbólum.

FELADAT

3 Az ábrán megadott vektorok mindegyikének rácspont a kezdőpontja és a végpontja is (*rácsvektorok*). A rács legkisebb négyzetének oldalhossza 1 egység.



a) Add meg mindegyik vektor hosszát!

b) Van-e a vektorok között két azonos állású? És két azonos irányú?

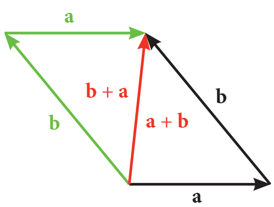
c) Szerkeszd meg a rács segítségével a következő vektorokat a füzetedben:
$\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{b}$,
$\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{d}+\mathbf{a}$, $\mathbf{b}+\mathbf{d}$!

d) Számítsd ki a megszerkesztett összegvektorok hosszát!

ELMÉLET

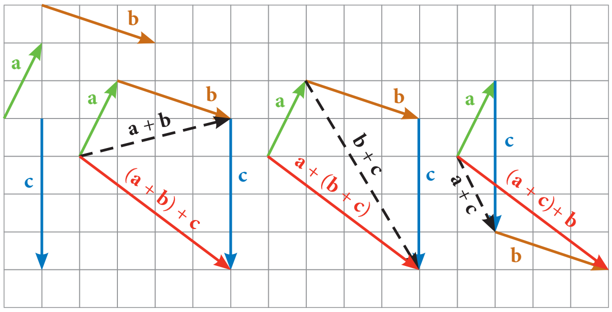
A vektorösszeadás kommutatív művelet

A paralelogramma-ábra nem egyállású vektorok esetére mutatja, hogy a **vektorösszeadás két tagja felcserélhető**: bármely **a** és **b** esetében $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.
Ez a kapcsolat egyállású vektoroknál is fennáll.



KIDOLGOZOTT FELADAT

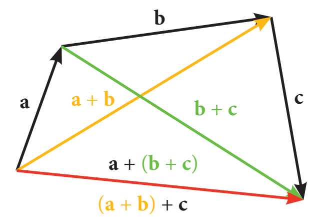
Adott az ábrán három rácsvektor: **a**, **b** és **c**. Kiválasztunk közülük kettőt és összeadjuk őket, majd a kapott összegvektorhoz hozzáadjuk a harmadik vektort. Hány különböző vektort kaphatunk a második összeadás után?



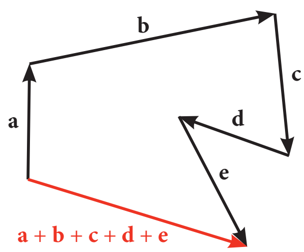
Megoldás
Három vektor közül háromféleképpen lehet kiválasztani kettőt. A két kiválasztott vektor összege nem függ a sorrendjüktől, tehát az első összeadás háromféle lehet: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ vagy $(\mathbf{a}+\mathbf{c})$. A harmadik vektornak és az előbb kapott összegvektornak az összege független a sorrendtől, tehát csak az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, az $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ és az $(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{b}$ eseteket kell megvizsgálni.
Mindhárom esetet megrajzolva azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a csoportosításoktól (és az összeadandók sorrendjétől is) függetlenül csak egyféle vektor (az ábrán a piros színnel jelölt vektor) lehet a három vektor összege.

ELMÉLET

A vektorösszeadás asszociatív művelet



Két vektor összegét definiáltuk, **bármely két vektor összege egy vektor** (ami akár a $\mathbf{0}$ is lehet). Ha három vektort kell összegezni, akkor először két vektort adunk össze, majd az így kapott összegvektorhoz hozzáadjuk a harmadik vektort.
Az ábrán egymáshoz csatlakozva mértük fel sorban az $\mathbf{a}$-t, a $\mathbf{b}$-t és a $\mathbf{c}$-t. Így jól látszik: mindegy, melyik két vektort adjuk össze az első lépésben, vagyis bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ esetében $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
Felesleges tehát zárójeleket írni: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

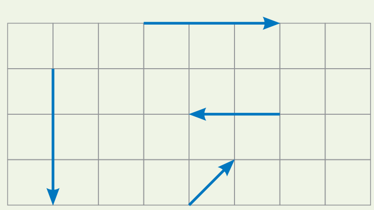


Az is igaz, hogy kettőnél több adott vektor összegét megkapjuk, ha (tetszőleges sorrendben) egymáshoz csatlakozva mérjük fel a vektorokat, és megrajzoljuk az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektort.

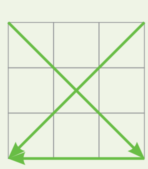
FELADAT

4 Rajzold meg az ábra vektorainak összegét a füzetedben!

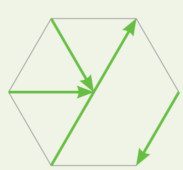
a)



b)

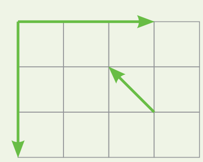


c)

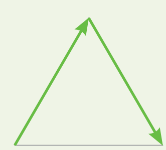


5 Az ábrán megadott vektorokhoz rajzolj hozzá még egy vektort úgy, hogy az ábra vektorainak összege $\mathbf{0}$ legyen! A füzetedben dolgozz!

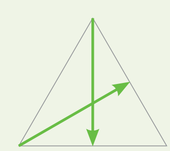
a)



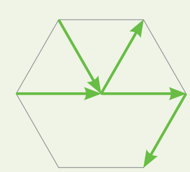
b)



c)



d)



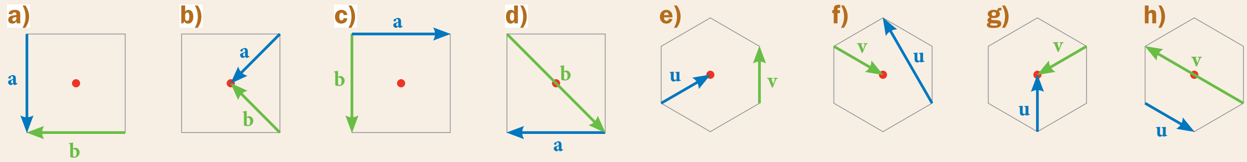
6 **a)** Az $ABCD$ téglalapban $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm. Számítsd ki a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ abszolút értékét!

b) Számítsd ki a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ abszolút értékét!

c) Az $ABCD$ rombusz oldalhossza 4 cm, $ABC\sphericalangle = 60°$.
Mekkora a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ hossza? És az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ hossza?

HÁZI FELADAT

1 Rajzold meg a két vektor összegét a füzetedben! (A négyzetnek és a szabályos hatszögnek adott a középpontja is.)



2 $|\mathbf{a}| = 6$ cm és $|\mathbf{b}| = 2{,}5$ cm, a vektorok állásáról nem tudunk semmit.

a) Legfeljebb mekkora lehet az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

b) Legalább mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

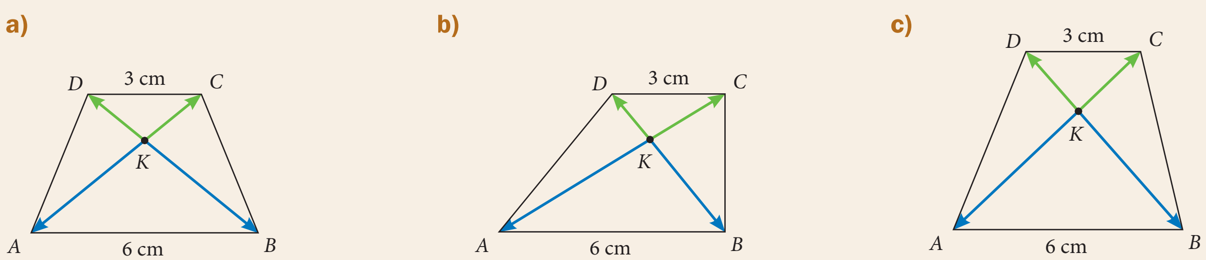
c) Számítsd ki, mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$!

3 Adj meg

a) 3 **b)** 4 **c)** 5

olyan vektort, amelyeknek $\mathbf{0}$ az összege!

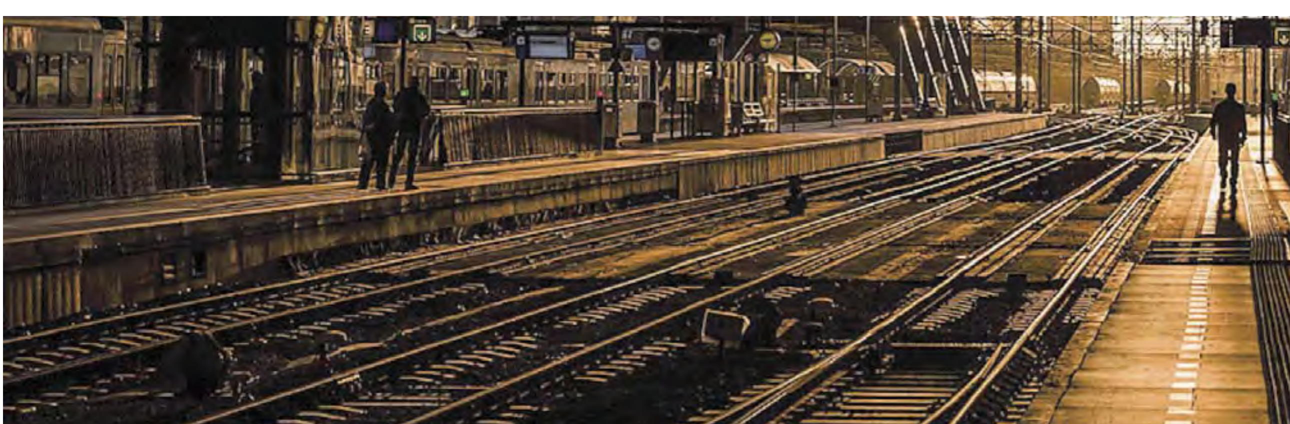
4 Szerkeszd meg a *K* pontból az *ABCD* trapéz csúcsaiba vezető négy vektor összegét! (*K* a trapéz átlóinak metszéspontja.) Hol van ennek a vektornak a végpontja, ha a kezdőpontját *K*-ba helyezed? A füzetedben dolgozz!



RÁADÁS

Rajzold meg egy *ABC* háromszög körülírt körét! A kör középpontját jelöld *K*-val! Milyen állású a $\overrightarrow{KA}$ és a $\overrightarrow{KB}$ összege, ha az *ACB*∢

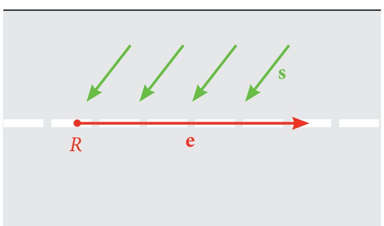
a) hegyesszög; **b)** derékszög; **c)** tompaszög?



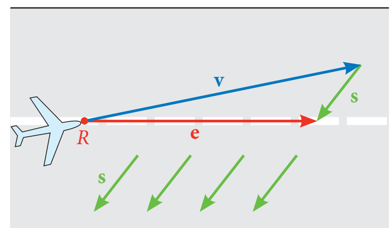
48 KÉT VEKTOR KÜLÖNBSÉGE

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan válassza meg a pilóta repülőgépének a levegőhöz viszonyított sebességét, ha a biztonságos leszálláshoz az előírt sebességgel kell haladnia a földhöz képest, de erős oldalszél fúj? A repülőgép az *R* pontban van, a leszálláshoz a földhöz képest **e** előírt sebességvektorral kellene repülnie, az oldalszél sebességét az **s** adja meg.



Megoldás
A 46. lecke kidolgozott feladatában láttuk, hogy a földhöz viszonyított sebességvektort megkapjuk, ha a repülőgép levegőhöz viszonyított **v** sebességvektorához hozzáadjuk a szél sebességvektorát. Tehát **e** = **v** + **s**. Ennek alapján könnyen szerkeszthető a **v**, hiszen ha az *R* pontból indítjuk, akkor az utána fűzött **s** végpontja éppen az **e** végpontja lesz.



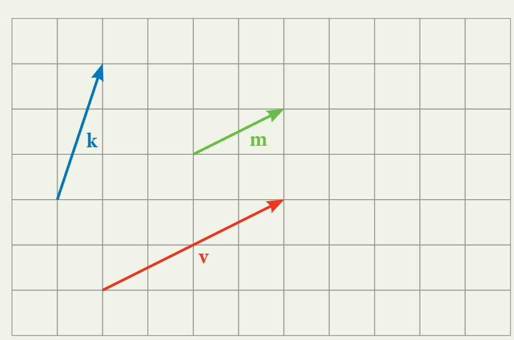
A repülőgépnek – az ábra tanúsága szerint – a szélcsendben szokásosnál nagyobb sebességgel kell a levegőhöz képest haladnia, és „rá is kell fordulnia” a szélirányra. Emiatt a repülőgép hossztengelye nem lesz párhuzamos a leszállópálya tengelyével.

Megjegyzés
A **v** vektort az **e** és az **s** *különbségvektorának* nevezzük, az **s** vektort pedig az **e** és a **v** *különbségvektorának*.
Jelekkel: **v** = **e** − **s** és **s** = **e** − **v**.

FELADAT

1. Melyik vektort adjuk hozzá a **v**-hez, hogy
a) a **k**-t, **b)** az **m**-et, **c)** a **0**-t
kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!

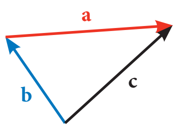
2. Melyik vektort adjuk hozzá a **k**-hoz, hogy
a) a **v**-t, **b)** az **m**-et, **c)** a **0**-t
kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!



ELMÉLET

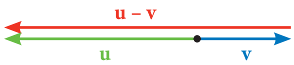
Két vektor kivonása

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor az $\mathbf{a}$ vektort a $\mathbf{c}$ és a $\mathbf{b}$ *különbségvektorának* (röviden: *különbségének*) mondjuk. *Jele:* $\mathbf{c} - \mathbf{b}$. Azt a **műveletet** pedig, amely a $\mathbf{c}$-ből és a $\mathbf{b}$-ből előállítja a különbségüket, **kivonásnak** nevezzük.



Az ábra szerint $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, és így a különbség definíciója szerint $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.
Hogyan szerkeszthető tehát a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$? A $\mathbf{b}$-t és $\mathbf{c}$-t közös kezdőpontból mérjük fel; a kivonandó vektor ($\mathbf{b}$) végpontjából a kisebbítendő vektor ($\mathbf{c}$) végpontjába mutató vektor adja a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ különbségvektort.

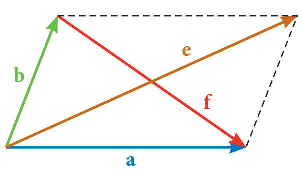
Ez a megfigyelés egyállású vektorok esetén is érvényes.



Megjegyzés
Vegyük észre: $\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$!

KIDOLGOZOTT FELADAT

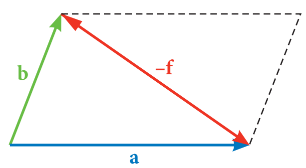
2. Írjuk fel a paralelogramma átlóvektorait a paralelogramma két, közös pontból induló oldalvektora segítségével!



Azt már korábban láttuk, hogy $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, a két vektor különbségénél mondottak szerint pedig $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ha két nem egyállású vektort közös kezdőpontból mérünk fel, akkor a paralelogrammává kiegészített ábrán egyszerre szemlélhetjük a két vektor összegét és különbségét is.

3. Milyen kapcsolat van az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ között?



Ha az előző feladatban megadott $\mathbf{f}$ átlóvektor ellentettjét tekintjük, akkor láthatjuk, hogy ez éppen a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
Ezek szerint az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **egymás ellentettje**:
$-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $-(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

FELADAT

3 **a)** Az $ABCD$ téglalapban $AB = 6$ cm, $AD = 2{,}5$ cm. Számítsd ki a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ és a $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ abszolút értékét!

b) Az $ABCD$ rombuszban $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 8$ cm, $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = 6$ cm.
Mekkora az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ hossza?

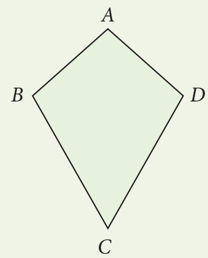
4 Mutasd meg konkrét példákon, hogy igazak az alábbi állítások!

a) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

c) $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$

5 Adott a konvex $ABCD$ deltoid, amelynek AC a szimmetriaátlója.



a) Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ oldalvektorokat!

b) Melyik igaz, melyik hamis a következő kijelentések közül?

I. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

II. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$;

III. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

IV. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$;

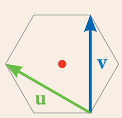
V. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ merőleges $(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC})$-re;

VI. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

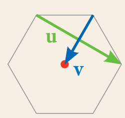
HÁZI FELADAT

1 Rajzold meg az **u** – **v** vektort! (A hatszög szabályos, a középpontja is adott.)

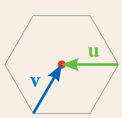
a)



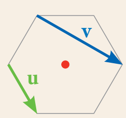
c)



b)



d)



2 Melyik vektorral egyenlő?

a) (**a** – **b**) + (**b** – **a**)

b) **c** + **d** – **a** + (–**c**) – **d**

c) **a** + **b** – (**b** – **a**) + (–**a**)

3 Milyen kapcsolat van a nem egyállású **u** és a **v** között, ha

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$;

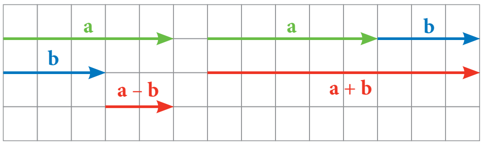
b) az (**u** + **v**) vektor merőleges az (**u** – **v**) vektorra?

RÁADÁS

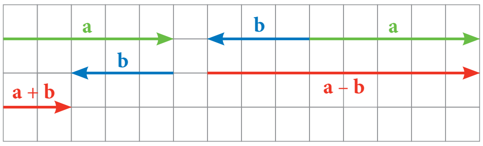
I. Milyen hosszú lehet két vektor összege, illetve különbsége?

Az egyszerűbb formák érdekében használjuk a vektor abszolút értékére a következő jelölést: $|\mathbf{v}| = v$.
A v tehát egy nemnegatív valós számot jelöl, a **v** hosszát.

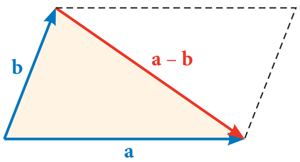
1. Ha **a** és **b** egyállású és egyirányú, akkor
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = a + b$,
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |a - b|$.



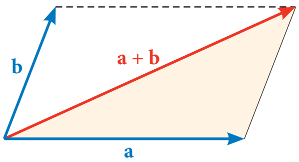
2. Ha **a** és **b** egyállású és ellentétes irányú, akkor
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |a - b|$,
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = a + b$.



3. Ha **a** és **b** nem egyállású, akkor gondoljunk a paralelogramma-szabályra!



Használjuk fel azt az ismeretet, hogy a háromszög oldalhossza kisebb a másik két oldal összegénél, és nagyobb a másik két oldal különbségénél. Ennek megfelelően
$|a - b| < |\mathbf{a} + \mathbf{b}| < a + b$ és $|a - b| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}| < a + b$.



1–3. A három esetet együtt így írhatjuk le: $|a - b| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le a + b$ és $|a - b| \le |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \le a + b$.

II. Változások

„Nincs, ami nem változnék, minden vándorol egyre,
Változtat s felforgat a természet keze mindent.”
(*Lucretius* római költő, Kr. e. I. sz.)

Az idő múlása sokszor együtt jár a változással. A változást a hétköznapokban kifejezhetjük szemléletesen („Óh, mennyit nőtt ez a gyerek tavaly óta!”) és pontosabban („Híztam két kilót.”; „Ötezer forinttal többet kaptam, mint a múlt hónapban.”). Minden esetben ugyanarról van szó. Egy korábbi állapotot hasonlítunk össze valamilyen szempontból egy későbbi állapottal. Például a tavalyi magasságunkat az ideivel, a múlt heti testtömegünket a jelenlegivel, a múlt havi fizetésünket az e havi fizetésünkkel.

Hogyan fejezzük ki a változást?

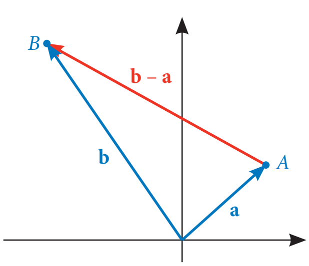
Minden esetben a **kivonás művelete segítségével**: az idei testmagasságunkból kivonjuk a tavalyi testmagasságunkat, a jelenlegi testtömegünkből a múltkori testtömegünket, az e havi fizetésünkből a múlt havi fizetésünket. A kivonás eredményével, **a különbséggel fejezzük ki a változást**.

Ez nem csak az egyetlen számmal kifejezhető mennyiségek (skalármennyiségek) esetében van így, a fizika minden olyan esetben ezt használja a mennyiségek megváltozásának kifejezésére, amikor a kivonás művelete értelmezve van. Minden esetben ugyanaz a „séma”: **„változás” = „végállapot” – „kezdőállapot”**.

Nézzünk erre két olyan példát, amelyben a fizikai mennyiséget vektorral lehet leírni!

1. példa

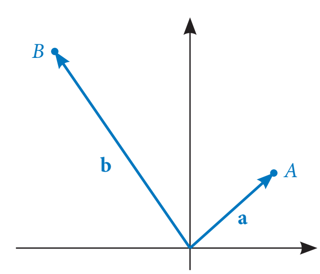
Egy mozgó test az *A* pontból a *B* pontba került. Hogyan változott meg a helyzete?



Kezdetben az **a** *helyvektor* adta meg a test helyzetét, a végállapotban pedig a **b** *helyvektor*. (A koordináta-rendszerben elhelyezkedő vektorok közül azokat nevezzük *helyvektoroknak*, amelyeknek az origó a kezdőpontja.) Tehát hogyan változott meg a test helyzete?

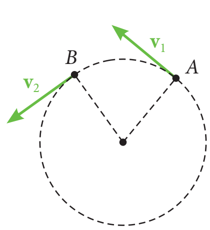
„változás” = „végállapot” − „kezdőállapot”

A test helyzetének megváltozását az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbségvektor (az elmozdulásvektor) adja meg!



2. példa

Egyenletes körmozgást végző test sebességvektorának a hossza nem változik, csak a vektor iránya. Hogyan változott meg a test sebességvektora, amíg a körpálya *A* pontjából a *B*-be jutott?

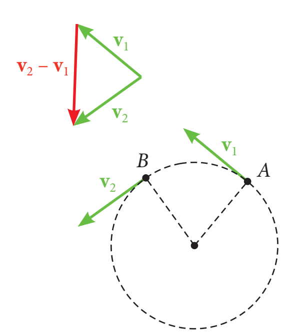


A válasz most is egyszerű:

„változás” = „végállapot” − „kezdőállapot”.

A sebességváltozás: $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, azaz a két sebességvektor különbségét kell megadnunk. Ezt a különbséget a lapon bárhol megszerkeszthetjük, hiszen a sebességváltozás vektorának megadásához csupán azt kell tudnunk, hogy ez a vektor milyen irányú és mekkora nagyságú.

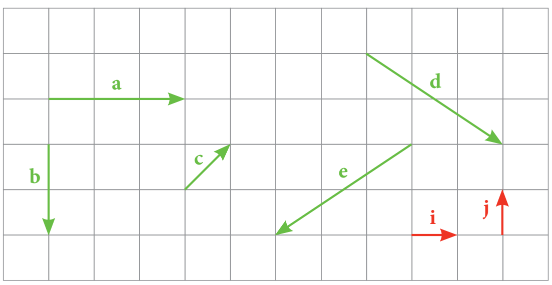
Az elmondottak egyértelművé teszik, hogy **az egyenletes körmozgást** végző test sebessége állandóan változik, ezért ez **gyorsuló mozgás** (a sebességvektor nagysága mindvégig ugyanakkora marad, de iránya folyamatosan változik).



49 VEKTOR SZÁMSZOROSA

BEVEZETŐ

Hogyan fejezhetjük ki az **i** és a **j** segítségével (a vektorösszeadás műveletét alkalmazva) az ábrán látható többi vektort?



Megoldás

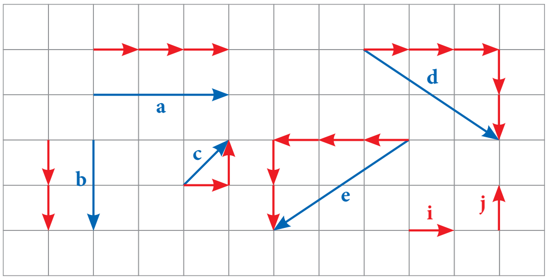
$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i}$,

$\mathbf{b} = (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,

$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$\mathbf{d} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i} + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,

$\mathbf{e} = (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$.

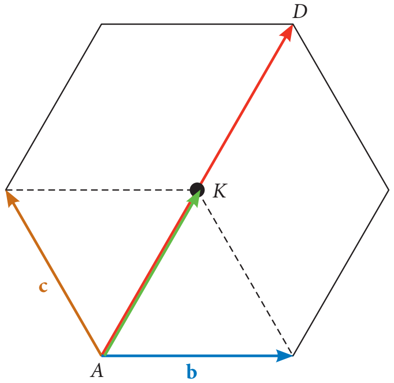


Kiegészítések

- Az **a** vektor egyállású és egyirányú az **i** vektorral, és 3-szor olyan hosszú, ezért azt is mondhatjuk, hogy az **a** az **i**-nek a *3-szorosa*. Jelöléssel: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$.
- A **b** vektor egyállású és ellentétes irányú a **j** vektorral, a hossza pedig kétszerese a **j** hosszának; ezért azt is mondhatjuk, hogy a **b** a **j**-nek a (−2)-szerese: $\mathbf{b} = -2\mathbf{j}$.
- A $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, ezért a fenti jelölések alkalmazásával: $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.
- Az **e** felírható így: $\mathbf{e} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. A fentiek miatt $-\mathbf{a} = -3\mathbf{i}$, tehát $\mathbf{e} = -3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Milyen kapcsolatban van az $\overrightarrow{AD}$ a **b** és a **c** összegével?



Megoldás

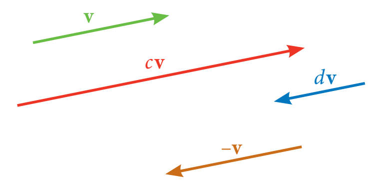
Az ábra szerint az $\overrightarrow{AD}$ a szabályos hatszög átlóvektora, a **b** és **c** a hatszögnek az *A* pontból induló két oldalvektora, *K* a hatszög középpontja.

A szabályos hatszög tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AK}$.

Ez egyállású és egyirányú az $\overrightarrow{AD}$-vel, és fele olyan hosszú. Ezért azt is mondhatjuk, hogy

$\overrightarrow{AD} = 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vagy másképp: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

ELMÉLET



Definíció: vektor számszorosa

Egy c pozitív szám és egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata az a vektor, amely a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású és egyirányú, abszolút értéke pedig c-szerese a $\mathbf{v}$ abszolút értékének: $|c\mathbf{v}| = c \cdot |\mathbf{v}|$.

Egy d negatív szám és egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata az a vektor, amely a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású és ellentétes irányú, abszolút értéke pedig $|d|$-szerese a $\mathbf{v}$ abszolút értékének: $|d\mathbf{v}| = |d| \cdot |\mathbf{v}|$.

Fontos speciális eset: $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, ez a $\mathbf{v}$ ellentettje.

A 0 és egy $\mathbf{v}$ szorzata a nullvektor: $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Kiegészítések

– A következő vektorok egyenlők:
  $(-3)\mathbf{a}$ [ez az $\mathbf{a}$-nak a (-3)-szorosa],
  $3(-\mathbf{a})$ (ez az $\mathbf{a}$ ellentettjének a 3-szorosa),
  $-(3\mathbf{a})$ (ez a $3\mathbf{a}$ ellentettje).
  Tehát $(-3)\mathbf{a} = 3(-\mathbf{a}) = -(3\mathbf{a}) = -3\mathbf{a}$. A $-3\mathbf{a}$ zárójel nélküli jelöléssel ezek közül bármelyikre gondolhatunk.

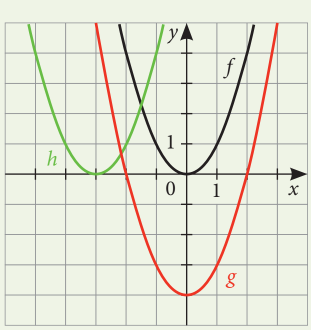
– „Negatív szám és vektor szorzása”, „két vektor különbsége”, „vektor ellentettje”: mindhárom esetben **ugyanazt a szimbólumot használjuk**: a „$-$” jelet, de mindhárom esetben teljesen más a jel matematikai tartalma (valós szám előjele, két vektor kivonásának jele, vektor ellentettjének a jele).
  Ezért nem „akadékoskodás” olyan egyszerűnek látszó dolgokon kissé elgondolkodni, hogy miért is írhatjuk például: $\mathbf{a} - (5\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-5)\mathbf{b} = \mathbf{a} + 5(-\mathbf{b})$, vagy a leggyakoribb felírással: $\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

– A bevezető feladatban $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, amit írhatunk így is: $\mathbf{c} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$.

FELADAT

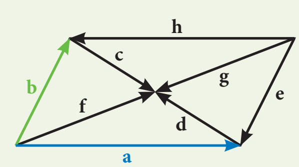
1 Mutasd meg, hogy a Bevezető feladat ábráján megadott $\mathbf{d}$ és $\mathbf{e}$ összege a $(-4\mathbf{j})$-vel egyenlő, és $\mathbf{d} - \mathbf{e} = 6\mathbf{i}$!

2 Jelöljük $\mathbf{i}$-vel azt a vektort, amely az origóból az $(1; 0)$ pontba vezet, $\mathbf{j}$-vel pedig azt, amelyik az origóból a $(0; 1)$ pontba vezet.
A 46. lecke házi feladatában foglalkoztál azokkal a vektorokkal, amelyekkel az itt lévő egyes parabolákat valamelyik másikba tolhatjuk el. Fejezd ki ezeket a vektorokat az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ segítségével!



3 Egy paralelogramma két oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. A paralelogrammába berajzoltunk néhány vektort. (A belső vektorok a szimmetriaközéppontba mutatnak.)
Keresd meg a berajzolt vektorok között az alábbi vektorokat:

$\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; $\quad -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\quad -\mathbf{a}$;
$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\quad -\mathbf{b}$; $\quad \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$!



4 Az itt látható kockában legyen $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{b} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AE}$. Írd fel ezeknek a vektoroknak a segítségével az alábbi vektorokat:
$\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{DQ}$, ahol Q a BF szakasz felezőpontja!