ÚJGENERÁCIÓS tankönyv

OFI

6

Matematika

törtek tükrözés arány
diagram oszthatóság felszín
szimmetria sokszög
egyenlet százalék

A kiadvány 2017. 02. 15-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/7–15/2017. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet: 2. sz. melléklet: Kerettanterv az általános iskolák 5–8. évfolyama számára 2.2.03. előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: Kónya István, Zarubay Attila

Tananyagfejlesztő: Gedeon Veronika, Korom Pál József, Számadó László, Urbán Z. János, dr. Wintsche Gergely

Alkotószerkesztő: dr. Wintsche Gergely

Vezetőszerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Tudományos szakmai lektor: Rózsahegyiné dr. Vásárhelyi Éva

Pedagógiai lektor: Beck Zsuzsanna

Nyelvi lektor: Szőnyi László Gyula

Olvasószerkesztő: Füleki Lászlóné, Mikes Vivien

Fedél: Slezák Ilona terve alapján készítette Kováts Borbála

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső, Szalókiné Tóth Annamária

Fotók: MorgueFile, WikimediaCommons, Flickr, PublicDomainPictures, Pixabay,
Projekt keretében készült fotók: Létai Márton, Orosz Adél, dr. Wintsche Gergely

Digitális tananyagfejlesztés: Pájer Boróka, Horváth Márta, Duchon Jenő, Alföldi Katalin, Királyné Porer Katalin, Fried Katalin, Pintér Mária, Tóthné Szalontay Anna

A tankönyv szerkesztői köszönetet mondanak a korábban készült tankönyvek szerzőinek. Az ő általuk megteremtett módszertani kultúra ösztönzést és példát adott e tankönyv/munkafüzet készítőinek is. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják. Köszönjük azoknak a tanároknak és diákoknak a munkáját, akik hasznos észrevételeikkel és javaslataikkal hozzájárultak e tankönyv/munkafüzet végső változatának kialakításához.

ISBN 978-963-436-027-8

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 235-7200 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor • Raktári szám: FI-503010601/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztő: Orosz Adél • Korrektor: Ihász Viktória • Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 22,66 (A/5) ív, tömeg: 446 gramm • 1. kiadás, 2017

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

Nyomtatta és kötötte:
Felelős vezető:
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Gratulálunk, már 6. osztályos lettél!

Az új matematikakönyvedet tartod a kezedben.

Minden fejezet elején találsz egy érdekes, rövid történetet.

4. példa

Jack kapitány Péter kalóza 15 kg, Pál kalóza pedig 10 kg aranyat zsákmányolt a király vámszedőinek hajójáról. A kincset 5 kilogrammonként fadobozokba rakták. Furfangos Jennire bízták a jutalom elosztását. A kapitány 50 tallér jutalmat adott a két kalóznak, amit Jenni a dobozok számának arányában osztott szét. Hány tallér jutalmat kapott a két kalóz?

Megoldás

Jenni az 50 tallért elosztotta a dobozok számával, 5-tel: $50 : 5 = 10$.
A jutalomból 1 dobozra 10 tallér jutott. Így az egyes jutalmak:
Péter kalóz: $3 \cdot 10 = 30$ és Pál kalóz $2 \cdot 10 = 20$ tallér jutalmat kapott.
A két kalóz által gyűjtött kincs aránya:
$15 : 10 = 3 : 2$.
A két kalóz által kapott jutalom aránya:
$30 : 20 = 3 : 2$.
A két arány megegyezik, tehát Jenni a jutalmat a zsákmány **arányában osztotta** el.

CSOPORTMUNKA

1. lépés: Az osztályból kiáll két gyerek. Az egyik egyesével számol, a másik kint álló gyerek minden második számnál tapsol egyet.
2. lépés: Kiáll még egy gyerek. Másvalaki egyesével számol, és ő minden harmadikra dobbant egyet.
3. lépés: Valaki egyesével számol, és a kint álló egyik gyerek minden másodikra tapsol, illetve a másik minden harmadikra dobbant.

Mely számoknál volt taps?
Mely számoknál volt dobbantás?
Mely számoknál volt taps és dobbantás is?
Mondj olyan számokat, amikor biztos nem lesz dobbantás!
Mondj olyan számokat, amikor biztos nem lesz egyszerre taps és dobbantás is!
Ismételjétek meg más számokkal is!

Az új ismereteket többnyire egy jól érthető példával (sárga alap), esetleg csoportmunkával (kék keret), vagy játékkal (szaggatott piros keret) vezetjük be.

Az otthoni kutatómunkának ajánlott feladatok lehetőséget nyújtanak az önálló felfedezésre.

Játékok

Egy-kettő-bumm
Álljatok körbe, és mondjátok sorban a számokat egytől! Az a feladat, hogy a hárommal osztható és a hármat tartalmazó számok helyett „bummot" kell mondanotok. (1, 2, bumm, 4, 5, bumm, 7, 8, bumm, 10, 11, bumm, bumm, 14, bumm stb.) Aki elrontja, leül, a végén az a nyertes, aki utoljára állva marad. Ha már nagyon jól megy, akkor játsszátok el másik számmal is! Kiesés után a számolást elölről kell kezdeni.

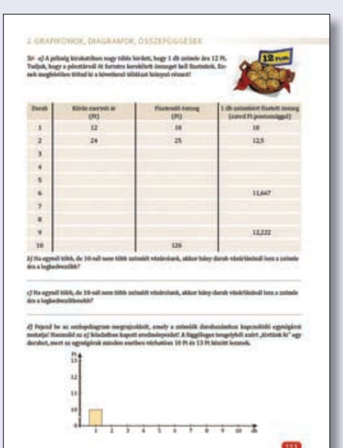
KUTATÓMUNKA

Vannak olyan szavak, amelyekben a betűk tükrösen helyezkednek el.
Nem geometriai tükrözésről van szó, csak a tükörképnél ugyanazt a betűt írjuk: Anna, apa, ...

Készíthetünk ilyen tulajdonságú mondatokat is: Géza, kék az ég!
Ezek a palindrom szavak, palindrom mondatok. Készíts, gyűjts ilyeneket!

Feladatok

1. Véleményed szerint az alábbi mennyiségek közül melyek állnak egyenes arányban egymással?
a) egy ember életkora – tömege;
b) év eleje óta eltelt napok – hetek száma;
c) telefonbeszélgetés hossza – fizetendő összeg;
d) hátizsák tömege – benne lévő füzetek, könyvek száma;
e) életkor – lábméret.

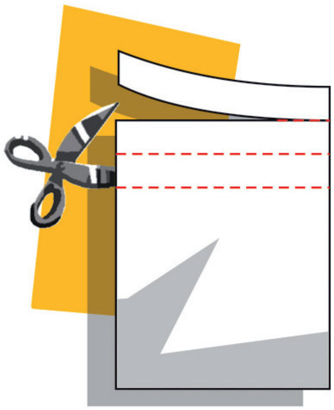


A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és játékos feladatai is segítenek a tanulásban.

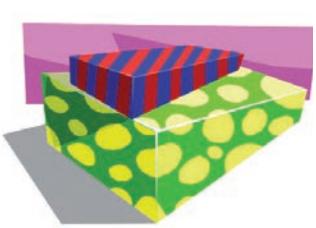
Minden lecke végén feladatokat találsz. Ezeket nehézségük szerint három csoportba soroltuk:

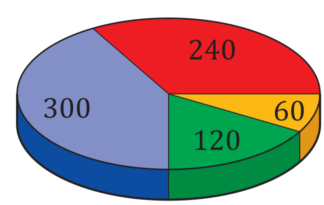
1. könnyű,
2. közepes,
3. kicsit nehéz.

JÓ SZÓRAKOZÁST!




1 öl
1 öl




240
300
60
120


75dkg
1kg
$\frac{1}{2}$ kg

Játékok

Egy-kettő-bumm
Álljatok körbe, és mondjátok a számokat egytől! Az a feladat, hogy a hárommal osztható és a hármat tartalmazó számok helyett „bummot” kell mondanotok. (1, 2, bumm, 4, 5, bumm, 7, 8, bumm, 10, 11, bumm, bumm, 14, bumm stb.) Aki elrontja, leül, a végén az a nyertes, aki utoljára állva marad. Ha már nagyon jól megy, akkor játsszátok el másik számmal is! Kiesés után a számolást elölről kell kezdeni.

Tréfás gondolkodtató feladatok

Tréfás gondolkodtató feladatokkal biztosan találkoztatok már. Az ilyen feladatok nagyon tanulságosak, és úgy maradnak fenn, mint a népmesék, változatos szövegezéssel. Az alábbi feladatokat régen találták ki, sokszor nem ismerjük a szerzőjüket.
Biztosan rá fogsz jönni te is a megoldásokra! Gondolkozz el azon, ami nem megy azonnal, és majd meglátod, milyen örömöt nyújt, amikor magadtól találod ki a megoldást! (A megoldásokat a 48. oldalon találhatod.)

Igazmondók–hazudósok
Dulifuli hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat mond, a hét más napjain mindig hazudik. Ma ezt mondta: „Holnap igazat fogok mondani.” Melyik napon történt ez?

Összeadás
Végezd el gyorsan fejben az összeadásokat!
Vegyél először 1000-et. Adj hozzá 40-et. Megint adj hozzá 1000-et. Majd 30-at. Ismét adj hozzá 1000-et. Most még 20-at. És még egyszer 1000-et. Végül még 10-et.
Mennyit kaptál?

Tréfa
A gyerekek megtréfálják Samut:
Emese azt mondja: „Péter hazudik.”
Péter azt mondja: „Tamás hazudik.”
Tamás azt mondja: „Emese és Péter hazudik.”
Ki mond igazat, ki hazudik? Segítsünk Samunak!

Régi érme
Egy ötvösinas hamisított egy régi érmét. A felirata szerint Kr. e. 126-ban verték. Nagyon szépen sikerült, ezért megpróbálta eladni a piacon. Mennyit kaphat érte, ha minden Krisztus előtti év 1000 forintot ér?

Víz a kútból

Van egy 9 literes és egy 4 literes vödrünk és egy kút, amiből vizet meríthetünk. Hogyan járhatunk el, ha pontosan

a) 5 liter vízre lenne szükségünk;

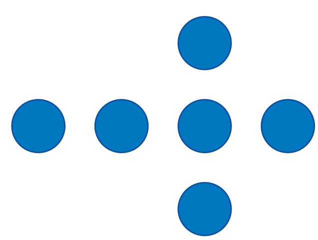
b) 6 liter vízre lenne szükségünk?

A farkas, a kecske és a káposzta

Egy pásztornak át kell vinnie a folyón egy farkast, egy kecskét és egy káposztát. A csónak olyan kicsi, hogy csak a pásztor ülhet bele, és mellé még vagy csak a farkas, vagy csak a kecske, vagy csak a káposzta fér el. Ha azonban a pásztor magára hagyja a farkast a kecskével, vagy a kecskét a káposztával, akkor az egyik megeszi a másikat. Hogyan kelhetnek át a folyón, hogy senkinek ne legyen bántódása?

Korongok

1 korong elmozdításával hogyan érhetnénk el, hogy a középső sorban és oszlopban 4-4 korong legyen?



Csupa csupor

Egy kamrában 7 teli, 7 félig teli és 7 üres mézescsupor van. Oszd el ezeket három medve között úgy, hogy mindegyiknek ugyanannyi csupor és ugyanannyi méz jusson!

Mi a címem?

A Rigó utcában lakom. 8 ház van az utca páros oldalán a keresztutcák között.

A 8 ház számainak összege 1016. A mi házunknak a legnagyobb a házszáma ezek közül. Mi lehet a házszámom?

Hány évesek?

Nagymama, anya és lánya együttesen 136 évesek. Az anya éveinek száma a nagymama éveinek egyharmadával kevesebb, mint nagymama éveinek száma. Az unoka éveinek száma egyenlő az anya éveinek egyharmadával. Hány évesek külön-külön?

Cukorka

– Hány cukorka van nálatok? – kérdeztük Pétert és Pált.

– Ha a nálunk lévő cukorkák összegéhez hozzáadom a szorzatukat, akkor 14-et kapok.

Hány darab cukorka van Péternél és Pálnál?

Ebéd

Néhányan ebédelni mentek, és le akartak ülni egy asztalnál. Ha minden székre egy ember ül, akkor egynek nem jut hely. Ha kettesével ülnek a székekre, akkor egy szék üresen marad. Hányan mentek ebédelni, és hány szék volt az asztal körül?

Tuaregek és a kincs

Két tuareg vezér poroszkál tevéjén egy oázis felé, ahol hatalmas kincs rejlik. Az oázistól 10 km-re megállnak tanácskozni, és három dologban egyeznek meg. Az első: az oázisban rejlő kincs csak egyvalakié lehet. Második: azé a kincs, akinek a tevéje utoljára ér az oázisba. És még egy harmadik dologban is megegyeznek. Ezek után mindenki felpattan a tevéjére, és ütve hajszolja vágtára az oázis felé. Mi lehetett a harmadik megállapodás?

Osztozkodás

Egy fáradt vándor érkezik teveháton egy házhoz, ahol három fiú tanakodik az örökségük mellett. Megkérdezi a vándor, hogy segíthet-e? Mire azt mondja a legkisebb:

– Édesapánk, a bölcs öreg, 17 tevét hagyott ránk, amin úgy kell osztoznunk, hogy a legidősebb fivérem kapja a tevék felét, a középső fivérem a harmadát, és én a legfiatalabb, kapjam a tevék kilenced részét.

A vándor gondolkodott, majd azt mondta:

– Megoldjuk, fiúk!

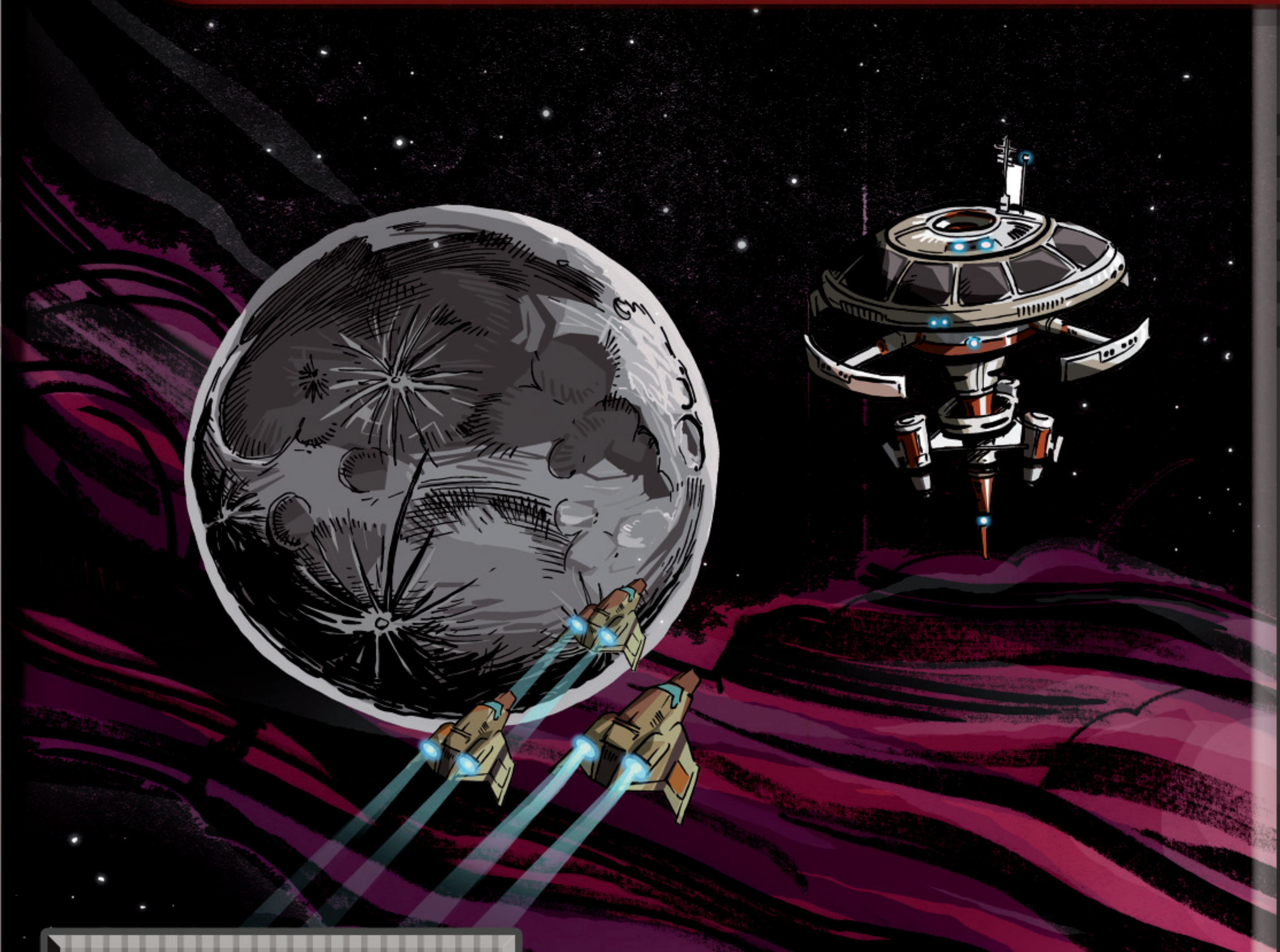
Hogyan osztották el a tevéket?

Logisztorik

Vigyázz! Némelyik feladat megoldása becsapós. (Készíts ábrát, rajzot!)

1. Lilla meghívta három barátnőjét a szülinapjára, de egyikük nem tudta, hogy át tud-e menni hozzá. Szeretné a négyzet alakú tortáját három vágással feldarabolni úgy, hogy akár hárman, akár négyen lesznek, mindenképpen igazságosan tudja elosztani a tortát. (Egy vágással keresztül kell vágni a tortát, és csak a három vágás után osztják szét.) Tervezd meg a vágásokat!
2. Ossz el 6 kockacukrot 3 kávéscsészébe úgy, hogy mindegyik csészében páratlan számú cukor legyen!
3. Egy lovas érkezett a szállodához Pénteken. Három napra jött, és a három nap elteltével, Szombaton távozott. Hogyan lehetséges ez?

I. Műveletek, oszthatóság

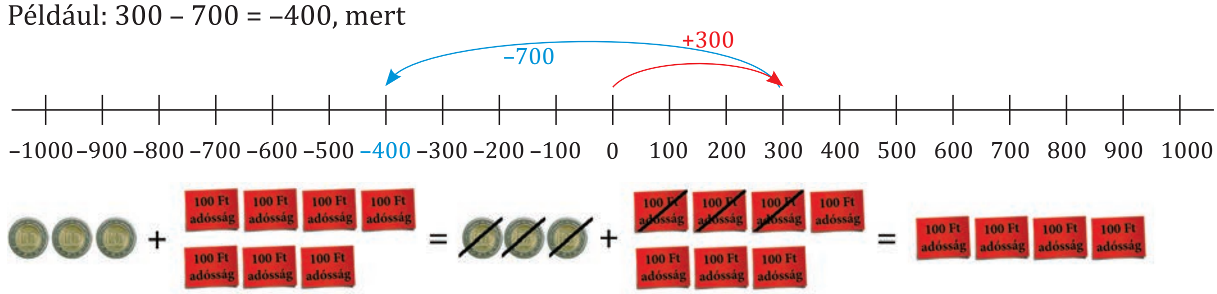


A hatodikos osztálykirándulás hasonlóan kezdődött, mint az előző. Két napja puszikat adtak anyának és apának, integettek a kikötőben, és felszálltak a helyi menetrend szerinti Hold-járatra. Éppen időben érkeztek ahhoz, hogy elcsípjenek egy földfelkeltét, aztán át kellett szállniuk. A Féreglyuk Expressz bérelt hajója a Hold körüli pályáról indult. Az osztály már tavaly is a FérEx-szel akart utazni, és most, hogy valóra vált az álmuk, lecsukták a szemüket, és figyelték a gyomrukban megjelenő gyenge remegést.
– A hajó indulásra kész – jelezte a központi számítógép. Holdidő szerint 13:00-kor start.
Panni, Gazsi és Gerzson is becsatolta a rögzítő hevedereket, és felnéztek Attilára, aki a kirándulást szervezte.
– Irány a Reciprok – mosolygott Attila, aki tavaly óta nem lett kevésbé okos, de jóval megfontoltabbnak tűnt, így a korábbi „Okoska” becenév is kezdett lekopni róla.
– Olyan bolygó nincs is a Naprendszerben – kapta fel a fejét Berta.
– Nincs bizony! – bólogatott Attila –, de a FérEx-szel mindegy, milyen távoli a cél. A Reciprok különleges hely. Ott minden törtet egészek reciprokaiból raknak össze, például $\frac{3}{4}$ helyett azt mondják: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.
– Törtidő alatt odaérünk – vigyorgott Attila.
– Már ha nem törjük össze magunkat – csatlakozott hozzá Zsombor.
– És persze, ha az utazás meg nem tizedel minket – kapcsolódott be Szofi is a mókázásba.
Észre sem vették, amikor a csillagok egy pillanatra kihunytak körülöttük, és megkezdték utazásukat.

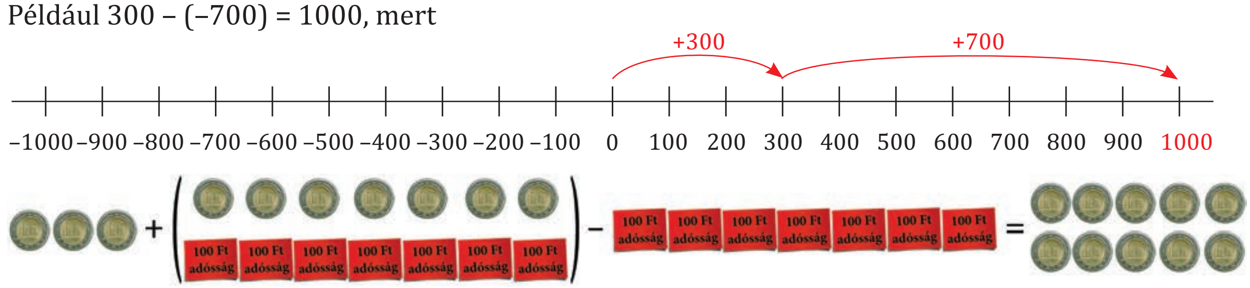
Játék

Alkossatok háromfős csoportokat! Az első játékos válasszon egy −3 és 3 közé eső tetszőleges egész számot! A játékosok sorban egymás után adjanak hozzá vagy −3, −2, −1 vagy 1, 2, 3 számot. Az a játékos veszít, akinek a −21-et, illetve a 21-et kell kimondania. Mondjátok ki a műveletet is!

Az egész számok összeadását és kivonását szemléltettük számegyenesen és adósságcédulákkal is.
Például: 300 – 700 = –400, mert



Például 300 – (–700) = 1000, mert



Feladatok

1. *a)* Rendezd nagyság szerint növekvő sorrendbe a felsorolt számokat!
0; 3; 7; −3; −7; 111; 120; −150; −2017; 2017
b) Rendezd nagyság szerint csökkenő sorrendbe a felsorolt számokat!
2; 15; 16; −2; −15; −16; 2018; −2018; 0; 1024

2. Ábrázold a számegyenes −10-től 10-ig terjedő részén
a) az 5-nél nagyobb egész számokat; *b)* az 5-nél kisebb egész számokat;
c) a −5-nél nagyobb egész számokat; *d)* a −5-nél kisebb egész számokat!

3. Írd fel a felsorolt számok ellentettjét és abszolút értékét!
2; 101; −1; 11001; −2; 12; −23; 100; 10 101; −100.

4. Végezd el a műveleteket! Szemléltesd a műveleteket számegyenesen és adósságokkal is!
a) $2 + 8$; *b)* $2 - 8$; *c)* $-2 + 8$; *d)* $-2 - 8$.

5. Végezd el a műveleteket!
a) $22 + 36$; *b)* $22 - 36$; *c)* $-22 + 36$; *d)* $-22 - 36$.

6. Végezd el a műveleteket!
a) $22 + (-36)$; *b)* $22 - (-36)$; *c)* $-22 + (-36)$; *d)* $-22 - (-36)$.

7. Egy vitorlázórepülő az egyik magasságmérőjét tengerszint felett 2000 méteren nullázta le a pilóta. (Az emelkedés a pozitív irány.)

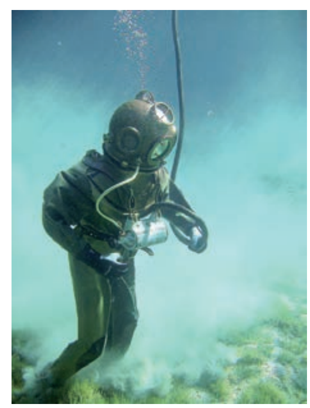
a) Mennyivel változott a repülő magassága 8 perc alatt, ha a repülő percenként 150 métert süllyedt? Milyen magasra került a repülő a tengerszinthez képest?

b) Mennyivel változott a repülő magassága 7 perc alatt, ha a repülő percenként 80 métert emelkedett? Milyen magasra került a repülő a tengerszinthez képest?

8. A búvár a vízfelszín alatt 20 méterrel nullázta le mélységmérő óráját. (A felfelé irány a pozitív.)

a) Mennyivel változott a búvár merülési mélysége 5 perc alatt az új 0 szinthez képest, ha percenként 4 métert süllyedt?

b) Mennyivel változott a búvár merülési mélysége 6 perc alatt az új 0 szinthez képest, ha percenként 1 métert emelkedett?



9. Anya adott Boginak 5000 Ft zsebpénzt. Bogi vett egy mozijegyet 1200 forintért, egy pattogatott kukoricát 590 forintért és az iskolai büfében egy kakaót 190, és két perecet, egyenként 160 forintért. Mennyi pénze maradt?

10. A Szubtraktion cég augusztus havi számláján −1 200 000 Ft volt a záró összeg (egyenleg). A bank a tartozásokat negatív számként kezeli a számlákon. Szeptemberben a táblázatban látható összegek kerültek a számlára (jóváírás), illetve lettek kifizetve (terhelés).

a) Hány forint bevétele volt a cégnek szeptemberben?

b) Hány forint költsége volt a cégnek szeptemberben?

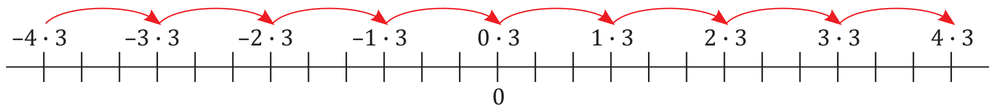
c) Hány forint volt a cég szeptember 30-i záró egyenlege?

Bevétel/Kiadás	Banki költség	Dátum
+ 360 000	0	2018. 09. 03.
+ 2 300 000	0	2018. 09. 03.
−240 000	−600	2018. 09. 10.
−302 000	−750	2018. 09. 10.
−482 000	−800	2018. 09. 12.
+ 1 111 000	0	2018. 09. 19.
−1 012 000	−1200	2018. 09. 24.
	−2990	2018. 09. 30.

2. AZ EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA

Pozitív egész számokat már régóta össze tudunk szorozni.

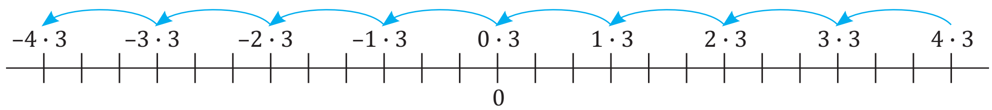
$$4 \cdot 3 = 12, \quad \text{mert} \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$



Sőt, 0-val is tudunk kényelmesen szorozni, hiszen tudjuk, hogy 0-nak bármelyik többszöröse 0.

Hasonlóan értelmezzük negatív és pozitív szám szorzatát is.

$$4 \cdot (-3) = -12, \quad \text{mert} \quad (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -3 - 3 - 3 - 3 = -12$$



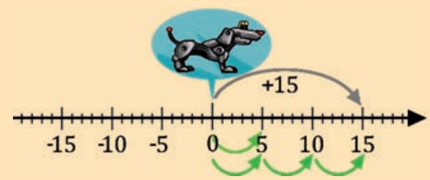
Példa

Robokuty a számegyenes 0 pontján áll, és a következő szorzatok értékeinek megfelelően halad jobbra vagy balra. Figyeljük meg Robokuty mozgását! Mely esetek jelentenek azonos irányú és nagyságú mozgást?

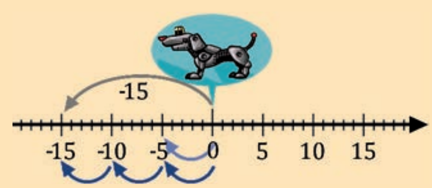
a) $(+3) \cdot (+5)$; *b)* $(+3) \cdot (-5)$; *c)* $(-3) \cdot (+5)$; *d)* $(-3) \cdot (-5)$.

Megoldás

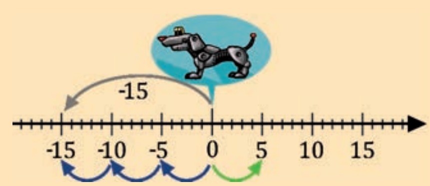
a) Ötödikben tanultuk, hogy a számok előjele a számegyenesen való haladási irányt is jelentheti. A (+5) tényező hatására Robokuty a számegyenesen 5-öt lépked pozitív irányba. A (+3) tényező pozitív előjele azt jelenti, hogy ne módosítson az eredeti irányon, a megegyező (tehát pozitív) irányba menjen ötösével 3-szor. Robokuty 15-öt lép pozitív irányba, vagyis a +15-höz ér.



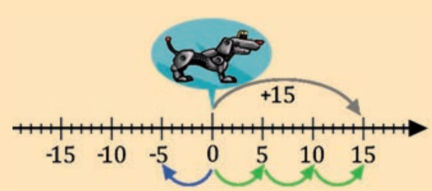
b) A (−5) tényező negatív előjele azt jelenti, hogy a számegyenesen negatív irányba induljon, és lépjen 5-öt. A (+3) tényező pedig azt, hogy módosítás nélkül, tehát a megegyező (negatív) irányba lépjen ötösével 3-szor.
Robokuty 15-öt lép negatív irányba, vagyis a −15-höz ér.



c) A (+5) tényező pozitív előjele azt jelenti, hogy a számegyenesen induljon el pozitív irányba, de a (−3) tényező negatív előjele miatt az eredeti pozitív irány módosul, negatívvá válik, ezért az ellentétes (tehát negatív) irányba kell lépnie ötösével 3-szor.
Robokuty 15-öt lép negatív irányba, vagyis a −15-höz ér.



d) A szorzatban a (−5) azt jelenti, hogy a számegyenesen lépjen 5-öt negatív irányba. A (−3) tényező pedig azt, hogy az eredeti negatív irányon módosítson, vagyis ellentétes (tehát pozitív) irányba haladjon, 3-szor lépdeljen ötösével.
Robokuty 15-öt lép pozitív irányba, vagyis a +15-höz ér.



Összefoglalva a lehetőségeket:

$$(+3) \cdot (+5) = (+15) \quad = \quad (-3) \cdot (-5) = (+15)$$
$$(-3) \cdot (+5) = (-15) \quad = \quad (+3) \cdot (-5) = (-15)$$

AZ EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA 2.

Két azonos előjelű szám szorzata pozitív, két különböző előjelű szám szorzata negatív lesz.

A szorzat abszolút értéke megegyezik a tényezők abszolút értékének szorzatával.

Ha a 0-t szorzom egy tetszőleges számmal, akkor a szorzat 0 lesz. $0 \cdot (-7) = 0$.

Ha egy számot (-1)-gyel szorzunk, akkor a szám **ellentettjét** kapjuk.
Például: A $(+5)$ ellentettje a $(-1) \cdot (+5) = -5$.
A (-3) ellentettje a $(-1) \cdot (-3) = +3$.

Feladatok

1. Határozd meg a számok ellentettjét!

a) (-1); *b)* (-34); *c)* (-3); *d)* 3;
e) 7; *f)* (-7); *g)* 100; *h)* 0.

2. Számold ki a szorzatokat!

a) $(-1) \cdot (+56)$; *b)* $(-34) \cdot (-1)$; *c)* $(-3) \cdot (+32)$; *d)* $(+3) \cdot (-4)$;
e) $(-5) \cdot (-3)$; *f)* $(+2) \cdot (+7)$; *g)* $(-5) \cdot (-25)$; *h)* $(-4) \cdot (-7)$.

3. Mely szorzatok abszolút értéke 24?

a) $(-2) \cdot (+12)$; *b)* $(-3) \cdot (+4)$; *c)* $(-5) \cdot (-5)$; *d)* $(+6) \cdot (-4)$;
e) $(-3) \cdot (-8)$; *f)* $(+1) \cdot (+24)$; *g)* $(-1) \cdot (-24)$; *h)* $(-4) \cdot (-6)$.

4. Számítsd ki a műveletek eredményét!

a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; *b)* $(-2) \cdot (-1) \cdot (-3)$; *c)* $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$;
d) $(-3) \cdot (-6) \cdot (+4)$; *e)* $(+3) \cdot (-8) \cdot (+3)$; *f)* $(+5) \cdot 0 \cdot (-6)$;
g) $|(+7) \cdot (-2)|$; *h)* $|(-8) \cdot (-5)|$; *i)* $|(-2) \cdot (-4) \cdot (-8)|$.

5. Végezd el a szorzásokat!

a) $(-346) \cdot (+302)$; *b)* $(-567) \cdot (+93)$; *c)* $(+465) \cdot (-345)$;
d) $(-345) \cdot (-41)$; *e)* $(+34) \cdot (-25) \cdot (-73)$; *f)* $(-21) \cdot (-47) \cdot (-52)$.

6. A 320 °C-os kemencét hajnali 4 órakor Kis Bence kikapcsolta. A kemence hőmérséklete a kikapcsolás utáni 6 órában átlagosan óránként 47 °C-kal csökkent.

a) Hány fokos lett a kemence délelőtt 10 órára?
b) Ki lehet-e számolni, hogy reggel 7-kor hány fokos volt? Válaszodat indokold meg!

7. Ha a 32 éves Bence egy tálcán 6 sorban 8-8 zsömlét tesz és egyszerre 5 tálca zsömlét süt, akkor 2 óra alatt hány zsömlét készíthet, ha 30 percenként készül el egy adaggal?

3. AZ EGÉSZ SZÁMOK OSZTÁSA

1. példa

Robokuty a számegyenes 0 pontján áll, és a következő hányadosoknak megfelelően kell haladnia. Döntsük el, hová kell lépnie az egyes esetekben!

a) (+15) : (+5); *b)* (+15) : (–5); *c)* (–15) : (+5); *d)* (–15) : (–5).

Megoldás

a) (+15) : (+5) = ◇; azaz keressük azt a számot, amelyre (+15) = ◇ · (+5). Ez nem jelent újdonságot, ez a szám a (+3). (+15) : (+5) = +3. Robokutynak a számegyenes (+3) pontjára kell lépnie.

b) (+15) : (–5) = ▭; azaz keressük azt a számot, amelyre (+15) = ▭ · (–5). Ez sem újdonság már. Az előző leckében megtanultuk, a keresett szám a (–3), mert (+15) = (–3) · (–5). (+15) : (–5) = –3. Robokutynak a számegyenes (–3) pontjára kell lépnie.

c) (–15) : (+5) = □; azaz keressük azt a számot, amelyre (–15) = □ · (+5). Az előzőhöz hasonlóan ez a szám a (–3), mert (–15) = (–3) · (+5). (–15) : (+5) = –3.
Robokutynak ismét a számegyenes (–3) pontjára kell lépnie.

d) (–15) : (–5) = △; azaz keressük azt a számot, amelyre (–15) = △ · (–5). Az előzőhöz hasonlóan ez a szám a (+3), mert (–15) = (+3) · (–5). (–15) : (–5) = +3.
Robokutynak ismét a számegyenes (–3) pontjára kell lépnie.

(+15) : (+5) = (+3) = (–15) : (–5) = (+3)
(–15) : (+5) = (–3) = (+15) : (–5) = (–3)

Két azonos előjelű szám hányadosa pozitív, két különböző előjelű szám hányadosa negatív lesz (az osztó nem lehet 0).

Ha a 0-t osztom valamely nemnulla számmal, akkor a hányados mindig 0.
0 : (–7) = 0, mert 0 · (–7) = 0.

Ha egy műveletsorban több szorzás és osztás szerepel, akkor azokat sorban végezzük el.

2. példa

Számoljuk ki a következő műveletsorok eredményét!
a) (–25) · (+9) : (–15);
b) (–39) · (+45) : (–13) : (–15) · (–2);
c) (+99) · (–8) : (–11) : (+6) · (–1).

Megoldás

Balról jobbra hajtjuk végre a műveleteket.
a) Először a szorzást végezzük el (–25) · (+9) = –225, majd az eredményt elosztjuk (–15)-tel. (–225) : (–15) = +15.

b) $(-39) \cdot (+45) = -1755;$
$(-1755) : (-13) = 135;$
$135 : (-15) = (-9);$
$(-9) \cdot (-2) = 18.$

c) $(+99) \cdot (-8) = -792;$
$-792 : (-11) = 72;$
$72 : (+6) = +12;$
$+12 \cdot (-1) = -12.$

A példa alapján látható, hogy ha a szorzás-osztás sorozatban páros számú negatív szám van, akkor az eredmény pozitív, ha pedig páratlan számú negatív szám, akkor az eredmény negatív.

Feladatok

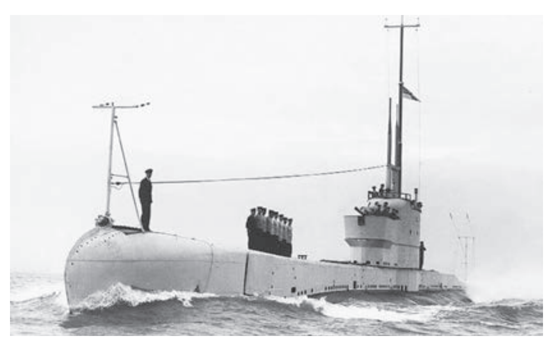
1. Határozd meg a hányadosok értékét!
a) $(-6) : (+1)$; *b)* $(-13) : (-1)$; *c)* $(-96) : (+32)$; *d)* $(+72) : (-4)$;
e) $(-63) : (-3)$; *f)* $(+77) : (+7)$; *g)* $(-625) : (-25)$; *h)* $(-91) : (-7)$.

2. Mely hányadosok abszolút értéke 12?
a) $(-144) : (+12)$; *b)* $(-52) : (+4)$; *c)* $(-60) : (-5)$; *d)* $(+48) : (-4)$;
e) $(-96) : (-8)$; *f)* $(+12) : (+1)$; *g)* $(-24) : (-2)$; *h)* $(-192) : (-16)$.

3. Számítsd ki a műveletek eredményét!
a) $(-1) : (-1) : (-1)$; *b)* $(-6) : (-2) : (-3)$; *c)* $(-100) : (-4) : (-5)$;
d) $(-312) : (-6) : (+4)$; *e)* $(+1224) : (-8) : (+3)$; *f)* $0 : (+5) : (-6)$;
g) $|14 : (-2)|$; *h)* $|(-40) : (-5)|$; *i)* $|(-288) : (-4) : (-8)|$.

4. Végezd el az osztásokat!
a) $(-906) : (+302)$; *b)* $(-651) : (+93)$; *c)* $(+1380) : (-345)$;
d) $(-369) : (-41)$; *e)* $(+1825) : (-25) : (-73)$; *f)* $(-56\,212) : (-47) : (-52)$.

5. A Poszeidon tengeralattjáró –300 méteren lebeg, majd gyakorlás céljából négy egyenlő szakaszban a felszínre emelkedik. Milyen mélységeken fog tartózkodni az egyes emelkedési szakaszok után?



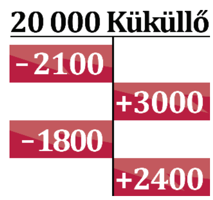
6. A hőmérséklet 12 °C-kal lett hidegebb 4 óra alatt. Ha minden órában ugyanannyival hűlt, akkor egy óra alatt mekkora volt a változás?

7. Brútusz elvégzett hat műveletet. Ha mind a hat eredménye helyes, ötöst kap.
a) Te hányast adnál Brútusznak?
b) Hallottál más órán Brútusz (Brutus) nevű személyről?

$(-13) : (-1) = -13$; $(+12) : (-4) = -3$; $(-98) : (-14) = -7$;
$(-111) : (-3) = +39$; $(+54) : (-27) = -2$; $(-72) : (-12) = 6$.

8. Bringaországban a kerékpárkölcsönző tulajdonosa megfigyelte, hogy átlagosan napi 20 000 küküllőt keres, ezért csak az ettől való eltérést szokta számolni. A többletet + jellel, az elmaradt hasznot – jellel jelöli. A +1200 küküllő esetén 21 200, –2300 küküllő esetén 17 700 küküllőt keresett.

Április első hetének eredménye:

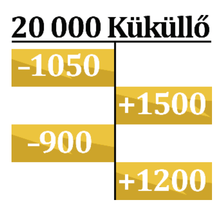


a) Melyik ábra mutatja április második hetének eltéréseit, ha minden nap éppen az első hét eltérései feleződtek meg?

b) Melyik ábra mutatja április harmadik hetének eltéréseit, ha minden nap éppen az első hét eltéréseinek mínusz harmada látható rajta?

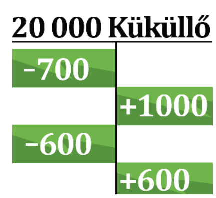
A:

B:



C:

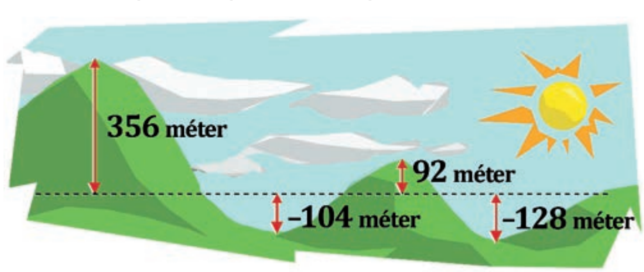
D:



9. Robokuty az ebéd utáni csendespihenőben elfoglalta magát!
A gumicsontra az volt írva: (–56) : (–7).
Mennyit kapott Robokuty,

a) ha az osztandót 3-mal szorozta, de az osztót nem változtatta meg?
b) ha az osztandót nem változtatta meg, de az osztót szorozta (–2)-vel?
c) ha az osztandót szorozta (–5)-tel, az osztót pedig (+4)-gyel?
d) ha az osztandót osztotta (–4)-gyel és az osztót szorozta (–2)-vel?

10. Az autópálya-tervezők az adott útszakasz magasságát a szaggatott vonalhoz mérik. Azt tartanák ideálisnak, ha az út minden hegy vagy völgy magaságának a negyedénél futna. Milyen magasan kell vezetni az utat az egyes hegyeken, völgyeken?



Oszthatósággal már foglalkoztunk az előző években is. Az oszthatóságot a természetes számok halmazán vizsgáljuk.

Ismétlés

A 3 osztója 18-nak, mert 18 : 3 = 6, azaz egész szám. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy van olyan természetes szám, amelyikkel a 3-at megszorozva 18-at kapunk. 18 = 3 · 6.
A 4 nem osztója 18-nak, mert 18 : 4 = 4,5; a hányados nem egész szám. Másként megfogalmazva nincs olyan természetes szám, amelyikkel a 4-et megszorozva 18-at kapnánk.

1. példa

Osztható-e 10-zel, 5-tel, illetve 2-vel az 1956; 2015; 3000 és a 149?

Megoldás

Készítsünk táblázatot!

		Oszható 10-zel?	Oszható 5-tel?	Oszható 2-vel?
1956	1956 = 1950 + 6	az egyesek helyén 6 áll nem osztható	az egyesek helyén 6 áll nem osztható	az egyesek helyén 6 áll osztható
2015	2015 = 2010 + 5	az egyesek helyén 5 áll nem osztható	az egyesek helyén 5 áll osztható	az egyesek helyén 5 áll nem osztható
3000	3000 = 3000 + 0	az egyesek helyén 0 áll osztható	az egyesek helyén 0 áll osztható	az egyesek helyén 0 áll osztható
149	149 = 140 + 9	az egyesek helyén 9 áll nem osztható	az egyesek helyén 9 áll nem osztható	az egyesek helyén 9 áll nem osztható

Írjuk fel a 2 többszöröseit: 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...
Írjuk fel az 5 többszöröseit: 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; ...
Írjuk fel a 10 többszöröseit: 0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; ...
A tíz többszörösei mind oszthatók tízzel, hiszen 10 · 0; 10 · 1; 10 · 2; ... alakúak.
Ha egy nem nullára végződő számot osztunk 10-zel, akkor a maradék nem nulla lesz.

Például: 2014 : 10 = 201
01
14
4
a maradék 4, tehát a szám nem osztható 10-zel.

2014 = 201 · 10 + 4 = 2010 + 4. Minden számot felírhatunk hasonlóan.

9 = 0 · 10 + 9	9 = 0 · 2 · 5 + 9
85 = 8 · 10 + 5	85 = 8 · 2 · 5 + 5
144 = 14 · 10 + 4	144 = 14 · 2 · 5 + 4
999 = 99 · 10 + 9	999 = 99 · 2 · 5 + 9
9870 = 987 · 10 + 0	9870 = 987 · 2 · 5 + 0

A 10 = 2 · 5, tehát amit 10 részre tudunk osztani, azt tovább oszthatjuk, ha minden részt elfelezünk.

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0.

4. OSZTHATÓSÁG 10-ZEL, 5-TEL, 2-VEL

Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is, tehát a 2-vel és az 5-tel való oszthatóság csak a szám utolsó jegyén múlik.

$$260 = 26 \cdot 10 = 26 \cdot 2 \cdot 5 \begin{cases} 52 \cdot 5 \\ 130 \cdot 2 \end{cases}$$

Például $85 = 8 \cdot 10 + 5$ esetén a $8 \cdot 10$ osztható 5-tel, tehát csak a szám utolsó jegyén múlik az 5-tel való oszthatóság, és az 5 osztható 5-tel.

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Például $85 = 8 \cdot 10 + 5$ esetén a $8 \cdot 10$ osztható 2-vel, tehát csak a szám utolsó jegyén múlik a 2-vel való oszthatóság. Az 5 nem osztható 2-vel, tehát 85 nem osztható 2-vel.
Például $144 = 14 \cdot 10 + 4$ osztható 2-vel.

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha páros, azaz utolsó számjegye 0, 2, 4, 6 vagy 8.

2. példa

a) Ábrázoljuk halmazábrán a 20-nál kisebb természetes számokat!
K = {kettővel osztható számok}; O = {öttel osztható számok}

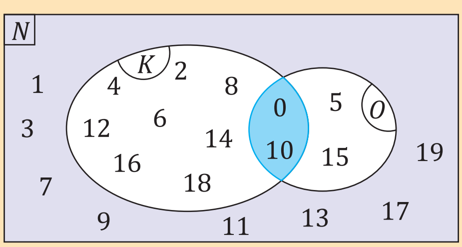
b) Mely számok lesznek elemei a K **és** az O halmaznak is?

c) Mely számok lesznek elemei a K **vagy** az O halmaznak?

Megoldás

Jelöljük az alaphalmazt N-nel.
N = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19}

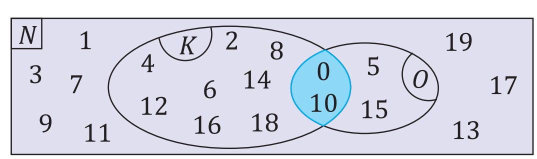
a)



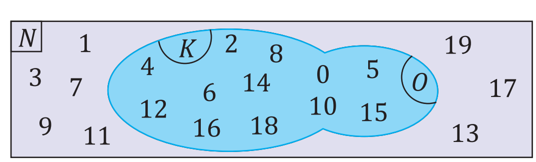
b) A K és az O halmaznak is a 0 és a 10 számok az elemei.

c) A 0; 2; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16; 18 számok elemei a K vagy az O halmaznak (lehetnek mindkettőnek elemei).

Két halmaz **metszete** (közös része) azokból az elemekből áll, amelyek mindkét halmaznak elemei.
A 2. példában szereplő K és O halmazok metszete (közös része) a {0; 10} halmaz.



Két halmaz **uniója** (egyesítettje) azokból az elemekből áll, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.
A 2. példában szereplő K és O halmazok uniója (egyesítettje) a {0; 2; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16; 18} halmaz.



Feladatok

1. A felsorolt számok közül melyek oszthatók 2-vel, és melyek oszthatók 5-tel?
1 000 000; 200 000; 303; 205; 10 105; 340; 2002; 4021; 58.

2. Írd le a felsorolt számokat a füzetedbe! Karikázd be kékkel az 5-tel, pirossal a 2-vel oszthatókat! Mit állapíthatsz meg a pirossal és kékkel is bekarikázott számokról?
600 000; 44 010; 650; 456; 9150; 80 460; 975.

3. Ábrázold halmazábrán a 2-vel és az 5-tel osztható számokat, ha az alaphalmaz a 19 és 41 közötti természetes számok halmaza!

4. Sorold fel azokat a 25-tel osztható számokat, amelyek nem kisebbek, mint 450 és nem nagyobbak, mint 725!

5. Egy SIM-kártya négyjegyű pinkódjáról a következőket tudjuk: 3-mal kezdődik, páros, az utolsó két számjegyből képzett szám háromszorosa az első két számjegyből képzett számnak. Mi lehet a kódszám?

6. Igaz-e?

a) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel is.
b) Ha egy szám osztható 5-tel, akkor osztható 10-zel is.
c) A páros számok tartalmaznak páros számjegyet.
d) Van 5-tel nem osztható páros szám.
e) Ha egy természetes szám osztható 10-zel, akkor osztható 100-zal is.
f) Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor nem osztható 10-zel.

7. Hány 100-nál kisebb természetes szám osztható
a) 2-vel? *b)* 5-tel? *c)* 10-zel?
d) 2-vel vagy 5-tel? *e)* 2 és 5 közül pontosan az egyikkel?
f) sem 2-vel, sem 5-tel? *g)* 2-vel és 5-tel, de 10-zel nem?
A válaszok megtalálásához segíthet, ha halmazábrát készítesz.

8. Válaszold meg a 7. feladat kérdéseit, ha a 10 000-nél kisebb természetes számok alkotják az alaphalmazt!

9. Fogalmazd meg a 100-zal és az 1000-rel oszthatóság szabályát!

10. Az Ó utcában összesen 46 ház van. Az utca számozása a Kő tértől indul. A bal oldalon vannak a páros, a jobb oldalon a páratlan házszámok és mindkét oldalon ugyanannyi ház van.

a) Hányadik ház a Kő tértől a 14-es számú?
b) A Kő tértől elindulva a bal oldalon lévő tizenkettedik háznak mi a száma?
c) Az utca másik végétől számolva mi a tizenkettedik ház száma a páros oldalon?

11. Hogyan tudnád eldönteni egy kettes számrendszerben felírt számról, hogy osztható-e kettővel?

5. OSZTHATÓSÁG 3-MAL ÉS 9-CEL

1. példa

Az osztály 9 lánytanulója 2187 matricát gyűjtött össze. Mindegyiknek ugyanannyi matricája volt. Lehetséges ez? Hány matricájuk volt fejenként?

Megoldás

Kézenfekvő elvégezni az osztást: 2187 : 9 = 243.

```
2187 : 9 = 243.
 38
  27
   0
```

A maradék 0, tehát minden lánynak 243 db matricája volt.

Az osztás művelete nagy számok esetén különösen hosszadalmas, sokan elrontják a számolás során. Keressünk olyan szabályt, mellyel könnyebben eldönthető egy számról, hogy osztható 9-cel vagy sem!

$2187 = 2000 + 100 + 80 + 7$

$1000 = 999 + 1$

$2000 = 2 \cdot 1000 = 2 \cdot 999 + \mathbf{2}$

Vegyünk el az 1000-esekből egyet, a maradék 999 már osztható 9-cel.

$100 = 99 + 1$

$100 = 1 \cdot 100 = 1 \cdot 99 + \mathbf{1}$

Vegyünk el a 100-asokból egyet, a maradék 99 már osztható 9-cel.

$10 = 9 + 1$

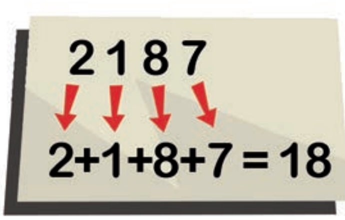
$80 = 8 \cdot 10 = 8 \cdot 9 + \mathbf{8}$

Vegyünk el a 10-esekből egyet, a maradék 9 már osztható 9-cel.

Az 1-esekből **7** marad.

$2 + 1 + 8 + 7 = 18$

Ha a maradékok összege osztható 9-cel, akkor szét tudja osztani egyformán a matricákat a lányok között, ha pedig nem osztható 9-cel az összeg, akkor nem. A 18 osztható 9-cel, tehát az eredeti szám, a 2187 is osztható 9-cel.



Figyeljük meg, hogy éppen a 2187 számjegyeit adtuk össze.

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható kilenccel, ha számjegyeinek összege osztható kilenccel.

A szabály segítségével eldönthetjük, hogy egy szám osztható-e 9-cel. Ha azt is tudni akarjuk, hogy mekkora a hányados, akkor érdemes elvégezni az osztást. A $9 = 3 \cdot 3$, tehát a 3 osztója a 9-nek. Az előző példában a 9; 99; 999; … nemcsak 9-cel osztható, hanem 3-mal is, tehát ugyanazt a szabályt fogalmazhatjuk meg a 3-mal való oszthatóságra is.

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható hárommal, ha számjegyeinek összege osztható hárommal.

2. példa

Az iskolai sportversenyen a három hatodik osztály összesen 3457 pontot szerzett. Lehetséges-e, hogy mind a három osztálynak ugyanannyi pontja lett?

Megoldás

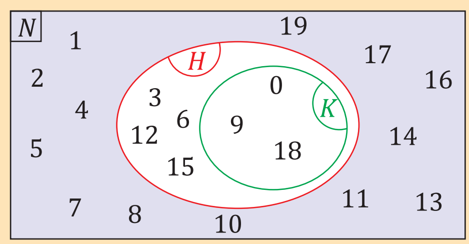
A kérdés az, hogy 3 osztója-e a 3457-nek. A számjegyek összege $3 + 4 + 5 + 7 = 19$, nem osztható 3-mal. Nem lehetséges, hogy mindhárom osztály ugyanannyi pontot szerzett.

3. példa

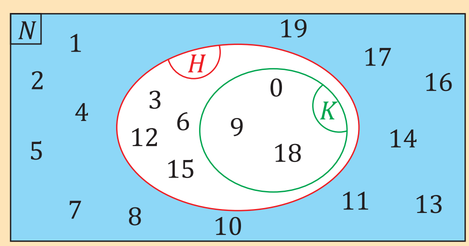
Ábrázoljuk halmazábrán a 20-nál kisebb természetes számokat!
H = {hárommal osztható számok}; K = {kilenccel osztható számok}
a) Milyen kapcsolat van a H és a K halmaz között?
b) Hol helyezkednek el a halmazábrán a hárommal nem osztható számok?

Megoldás

a) Az alaphalmazt, azaz a 20-nál kisebb természetes számok halmazát jelöljük most is N-nel. A K halmaz benne van a H halmazban.



b) A hárommal nem osztható számok az alaphalmaz azon elemei, amelyek nincsenek benne H-ban. Az ábrán kékkel jelöltük.



Ha a K halmaz minden eleme eleme a H halmaznak is, akkor azt mondjuk, hogy K **részhalmaza** H-nak.

Az N alaphalmaz H halmazhoz nem tartozó elemeit H halmaz N halmazra vonatkozó **komplementerének** nevezzük. Ha nem okoz félreértést, akkor röviden csak azt mondjuk, H komplementere.

Kutatómunka

Keressetek olyan szólásokat, közmondásokat, amelyikben a három vagy a kilenc szó szerepel!

5. OSZTHATÓSÁG 3-MAL ÉS 9-CEL

Feladatok

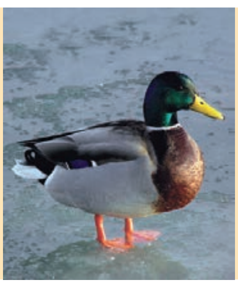
1. Mely számok oszthatók 3-mal a következők közül?

246;	298;	35 634;	231;	980;	3075;
65;	2349;	504;	432;	444;	519.

2. Mely számok oszthatók 9-cel a következők közül?

4568;	435;	211;	456;	439;	232;
23;	654;	902;	33;	333;	784.

3. A mezőgazdász apa magához hívta 3 fiát, és megkérte őket, hogy az állatai közül az egyik fajtát osszák el egymás között igazságosan. Melyik jószágot választották, ha mindhármuknak ugyanannyi jutott?


421 kacsa


2576 házityúk


1695 liba

4. Melyik igaz?
a) Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel.
b) Minden 9-cel osztható szám osztható 3-mal.
c) A 6-tal osztható számok számjegyeinek összege osztható 3-mal.
d) A 6-tal osztható számok számjegyeinek összege osztható 2-vel.
e) Nem minden 9-cel osztható szám páratlan.
f) Ha egy szám osztható 3-mal és 9-cel, akkor osztható 27-tel.
g) Ha egy szám osztható 2-vel és 9-cel, akkor osztható 18-cal.
h) Ha egy szám osztható 45-tel, akkor osztható 5-tel és 9-cel.

5. Mikor osztható egy szám hattal? Mely számok oszthatók 6-tal a következő számok közül?

345 689;	3 399 876;	4 445 634;	2 345 670;	343 542;	56 235 768.

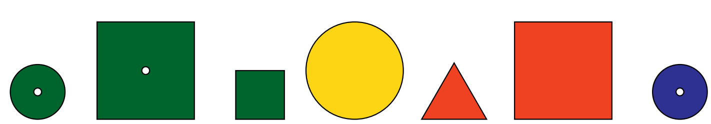
6. Melyik számkártyahármasokból állíthatsz össze hárommal osztható számokat? Írd le a lehetséges megoldásokat!

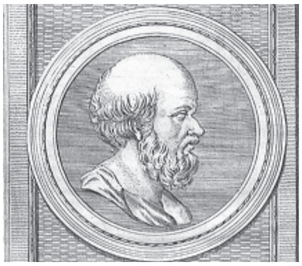
a)


b)


c)


7. Készíts a logikai készlet itt látható darabjaiból halmazábrát! Az *L* halmazban legyenek a lyukas darabok, a *Z* halmazban pedig a zöldek!





Az ókori Görögországban körülbelül 2200 évvel ezelőtt Eratoszthenész kitalált egy eljárást, amit később róla neveztek el eratoszthenészi szitának. Eljárása arra szolgált, hogy különleges tulajdonságú számokat találjon. Ismételjük meg a módszerét!

1	2 2	3	4 2	5	6 2	7	8 2	9	10 2
11	12 2	13	14 2	15	16 2	17	18 2	19	20 2
21	22 2	23	24 2	25	26 2	27	28 2	29	30 2
31	32 2	33	34 2	35	36 2	37	38 2	39	40 2
41	42 2	43	44 2	45	46 2	47	48 2	49	50 2
51	52 2	53	54 2	55	56 2	57	58 2	59	60 2
61	62 2	63	64 2	65	66 2	67	68 2	69	70 2
71	72 2	73	74 2	75	76 2	77	78 2	79	80 2
81	82 2	83	84 2	85	86 2	87	88 2	89	90 2
91	92 2	93	94 2	95	96 2	97	98 2	99	100 2

Írjuk fel a számokat sorban – mi most 100-ig írtuk fel a számokat –, és húzzuk ki a táblázatból azokat, amelyek valamilyen szám többszörösei! Az 1 minden számnak osztója, különleges, ezzel nem foglalkozunk. A legkisebb szám a kettes, ezt bekeretezzük, és minden olyan számot kihúzunk, amelyik a 2 többszöröse, azaz az összes páros számot.

A következő szám, ami még nincs kihúzva, az a 3. Ezt bekeretezzük, és kihúzzuk a többszöröseit. Ha egy számot már korábban kihúztunk, azzal nem foglalkozunk.

A következő ki nem húzott szám az 5. Bekeretezzük és kihúzzuk a többszöröseit, és folytatjuk az eljárást, amíg minden számot ki nem húzunk vagy be nem keretezünk. A megmaradt bekeretezett számok a 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

$2 = 1 \cdot 2$; $3 = 1 \cdot 3$; $5 = 1 \cdot 5$; ...

Ezek a számok különlegesek, mert **pontosan két különböző pozitív osztóval rendelkeznek, az 1-gyel és önmagukkal. Ezeket a számokat prímszámoknak, vagy röviden prímeknek** nevezzük. (Más néven törzsszámoknak is szokták hívni.)

A 0 kivételével azok a számok, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van, az összetett számok.

A 0-nak minden pozitív szám osztója, ezért őt nem tekintjük se prímszámnak, se összetett számnak.

Az 1-nek csak 1 pozitív osztója van, az 1, ezért ő nem prím és nem is összetett szám.

Az összetett számokat felbonthatjuk náluk kisebb természetes számok szorzatára is. Például: $12 = 3 \cdot 4$, $9 = 3 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$ stb. Ha valamelyik tényező, mint például a $3 \cdot 4$-ben a 4 szintén összetett szám, akkor azt tovább bonthatjuk, $4 = 2 \cdot 2$. Ha már minden tényező prímszám, akkor a felbontás nem folytatható tovább.

Játék

Álljatok össze 3-as csoportokba! Az egyikőtök mond egy 20 és 100 közötti páros számot. A másik két játékos közül az kap egy pontot, aki előbb találja ki, hogy melyik két prím összege a szám. Például $48 = 5 + 43$ vagy $7 + 41$. Aztán a másik játékos mond egy páros számot stb. Az nyer, akinek előbb gyűlik össze 5 pontja.

6. PRÍMSZÁMOK, ÖSSZETETT SZÁMOK

1. példa

Bontsuk fel a 90-et prímszámok szorzatára!

Megoldás

Az egyik felbontás:
$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot (3 \cdot 15) = 2 \cdot [3 \cdot (3 \cdot 5)]$.
A zárójelek elhagyhatók, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Kezdhettük volna másik számmal is:
$90 = 3 \cdot 30 = 3 \cdot (3 \cdot 10) =$
$= 3 \cdot [3 \cdot (2 \cdot 5)] = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$.

Egy harmadik lehetőség:
$90 = 3 \cdot 30 = 3 \cdot (5 \cdot 6) =$
$= 3 \cdot [5 \cdot (2 \cdot 3)] = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$.

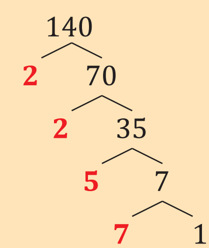
2. példa

Bontsuk fel a 140-et prímek szorzatára!

Megoldás

A felbontáshoz kell keresni egy prímszámot, amely osztója a 140-nek. Ilyen például a 2.
A kényelmes követhetőség érdekében sokan húznak egy függőleges vonalat a 140 mögé, sokan pedig rajzolni kezdenek egy favázat. Az ábrákon láthatod a prímtényezők megtalálásának menetét.

140	**2**
70	**2**
35	**5**
7	**7**
1	



A 140 prímtényezős felbontása tehát:
$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$.

A felbontásokból látjuk, hogy egy összetett szám felírható prímszámok szorzataként. A felbontások ugyanazokat a prímtényezőket tartalmazzák, csak legfeljebb más sorrendben.

Feladatok

1. Válogasd ki a következő számok közül a prímszámokat és az összetett számokat! Mely számok nem kerültek egyik csoportba sem?
12; 7; 13; 1; 17; 21; 43; 45; 63; 57; 0; 34; 2; 31; 33.

2. Készítsd el a következő számok prímtényezős felbontását!
a) 10; *b)* 24; *c)* 30; *d)* 36; *e)* 50; *f)* 59; *g)* 60; *h)* 61; *i)* 62; *j)* 70; *k)* 102; *l)* 105.

3. Három testvér életkora prímszám, és vannak köztük ikrek. Éveik számának szorzata 20. Hány évesek az ikrek?

4. Melyik az a legkisebb szám, amelynek prímtényezős felbontásában három különböző prím szerepel?

5. Egy szám osztható 14-gyel. Prímtényezős felbontásában három darab prímszám szerepel, de csak kétféle. Melyik lehet ez a szám? (Több megoldás is lehetséges.)

6. Két szám szorzata 28. Az egyik szám prímtényezős felbontása kétféle prímszámból áll. Mekkora a másik szám?

7. Peti összeszorozta jó barátainak számát az életkorával és az osztálytársainak számával, és így 598-at kapott. Hány éves Peti? Hány tagú az osztálya? Hány jó barátja van?

8. Igaz-e?
a) Ha egy szám páros, akkor prímtényezős felbontásában szerepel a 2.
b) Ha egy szám prímtényezős felbontásában szerepel a 2, akkor a szám 2-re végződik.
c) Ha egy szám prímtényezős felbontásában szerepel a 3, akkor a szám 3-ra végződik.
d) Ha egy szám 2-re végződik, akkor a prímtényezős felbontásában szerepel a 2.

KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS 7.

Csoportmunka

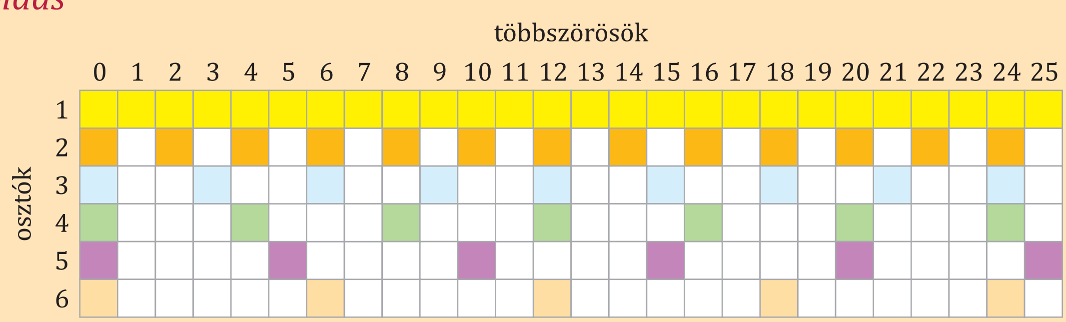
1. lépés: Az osztályból kiáll két gyerek. Az egyik egyesével számol egytől kezdve, a másik kint álló gyerek minden második számnál tapsol egyet.
2. lépés: Kiáll még egy gyerek. Másvalaki egyesével számol, és ő minden harmadikra dobbant egyet.
3. lépés: Valaki egyesével számol, és a kint álló egyik gyerek minden másodikra tapsol, illetve a másik minden harmadikra dobbant.

Mely számoknál volt taps?
Mely számoknál volt dobbantás?
Mely számoknál volt taps és dobbantás is?
Mondj olyan számokat, amikor biztos nem lesz dobbantás!
Mondj olyan számokat, amikor biztos nem lesz egyszerre taps és dobbantás is!
Ismételjétek meg más számokkal is!

1. példa

Szofi azt a házi feladatot kapta, hogy a füzetében 0-tól 25-ig számozza be az oszlopokat, és az első 6 sorban számozza be, és színezze ki azokat a négyzeteket, ahol a sorhoz tartozó szám osztja az oszlophoz tartozó számot.

Megoldás



Szofiék osztályában az ábra alapján több dolgot is észrevettek.

1. észrevétel:
Minden sorban a sorszámhoz tartozó többszörösöket színezték be. Például a harmadik sorban beszínezett négyzetekhez tartozó számok (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24) a 3 **többszörösei**, ezek a számok oszthatók 3-mal.

2. észrevétel:
Az oszlopokhoz csak azokban a sorokban tartozik színezett négyzet, amelyek sorszámával az oszlop száma osztható. Például a 6. oszlopnál az 1, a 2, 3, 6 színezett, ezek a számok a 6 **osztói**.

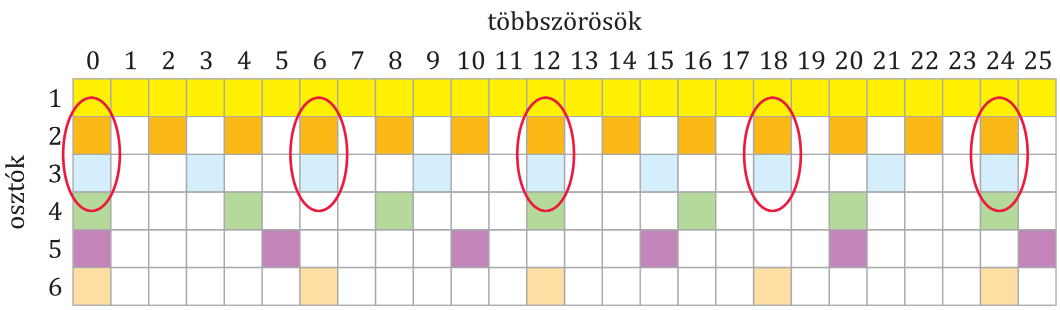
7. KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

3. észrevétel:
Az 1 minden természetes számnak osztója, hiszen minden természetes szám többszöröse az 1-nek.

4. észrevétel:
Minden pozitív természetes szám osztója önmagának, mert $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 1 = 2$; $3 \cdot 1 = 3$; …

5. észrevétel:
A 0 minden pozitív egész szám többszöröse, vagyis 0-nak minden pozitív egész szám osztója.

Legkisebb közös többszörös



Észrevehetjük, hogy két sort kiválasztva, rendszeresen ismétlődve ugyanazokat az oszlopokat színezzük be. A 2. és 3. sor esetén a 0., a 6., a 12., a 18. és a 24. oszlopot.
A 0, a 6, a 12, a 18 és a 24 a 2-nek és a 3-nak is többszörösei (vagyis mindegyiknek osztója a 2 és a 3 is), ezért mondjuk, hogy ezek a számok a 2-nek és a 3-nak a **közös többszörösei.** (A 0-val, mint többszörössel most nem foglalkozunk, mert a 0 minden számnak többszöröse.)
A 4-nek és 6-nak a közös többszöröseit vég nélkül lehetne sorolni, 12; 24; 36; 48; 60; 72; …; nincsen köztük legnagyobb. A pozitív többszörösök között van viszont egy legkisebb. A példában a 4-nek és a 6-nak a **legkisebb közös többszöröse** a 12.

Két szám legkisebb közös többszöröse az a szám, amely mind a kettőnek többszöröse, és a pozitív többszörösök közül a legkisebb. Jelölése a szögletes zárójel: [4; 6] = 12.

2. példa

Adjuk össze az $\frac{5}{24}$ és a $\frac{7}{36}$ törteket!

Megoldás

A törteket közös nevezőre kell hozni, tehát olyan számot keresünk, amelynek mindkét nevező osztója, vagyis egy közös többszöröst. A lehetséges megoldások közül célszerű a legkisebb közös többszöröst megkeresni, mert ezzel egyszerűbb a számolás.

A 24 többszörösei a 24; 48; 72; 96; 120; 144; …
A 36 többszörösei a 36; 72; 108; 144; …
A közös töbszörösök a 72; 144; 216; …
A legkisebb közös többszörös a 72. [24; 36] = 72.

$$\frac{5}{24} + \frac{7}{36} = \frac{3 \cdot 5}{72} + \frac{2 \cdot 7}{72} = \frac{15}{72} + \frac{14}{72} = \frac{29}{72}.$$

Feladatok

1. Kockás füzetben számozd meg az oszlopokat 0-tól 30-ig és a sorokat 1-től 10-ig! Minden sorban színezd ki azt a négyzetet, ahol a sorhoz írt számot osztja az oszlophoz írt szám!

2. Melyik igaz, melyik hamis?
a) 1 osztója 1-nek; *b)* 2 osztója 1-nek; *c)* 1 osztója 2-nek; *d)* 0 osztója 0-nak;
e) 0 osztója 1-nek; *f)* 1 osztója 0-nak; *g)* 3 osztója 20-nak; *h)* 5 osztója 15-nek.

3. Sorold fel a számok pozitív osztóit!
a) 5; *b)* 6; *c)* 8; *d)* 36; *e)* 1; *f)* 0.

4. Írd le a füzetedbe a 3 és az 5 többszöröseit 45-ig! A megtalált többszörösök közül válaszd ki a közös többszörösöket!

5. Rajzolj a füzetedbe számegyenest 0-tól egyesével 30-ig! Pirossal jelöld a 2 többszöröseit, kékkel a 3 többszöröseit!
a) Mely számokat jelölted kékkel és pirossal is?
b) Mely számoknak többszörösei a pirossal és kékkel jelölt számok?
c) Melyik szám osztója az összes kékkel és pirossal jelölt számnak?
d) Melyik szám a 2 és a 3 legkisebb közös többszöröse?

6. Keresd meg a legkisebb közös többszöröst!
a) [5; 6]; *b)* [9; 8]; *c)* [12; 8]; *d)* [6; 12];
e) [30; 40]; *f)* [12; 72]; *g)* [11; 13]; *h)* [9; 27].

7. Hozd közös nevezőre a törteket, és számold ki az összegüket, különbségüket!
a) $\frac{11}{6}$ és $\frac{3}{8}$; *b)* $\frac{13}{6}$ és $\frac{2}{15}$; *c)* $\frac{9}{10}$ és $\frac{5}{18}$; *d)* $\frac{11}{3}$ és $\frac{3}{8}$.

8. A 12 melyik két szám legkisebb közös többszöröse? (Több megoldás is lehetséges.)

9. Igaz-e?
a) Egy páros szám többszöröse páros szám.
b) Egy páros szám összes osztója páros szám.
c) Egy páratlan szám összes osztója páratlan.
d) Egy páratlan szám minden többszöröse páratlan.

10. Igaz-e?
a) A legkisebb közös többszörös minden közös többszörösnek osztója.
b) Egy szám osztói a szám többszörösének is osztói.
c) Két szám legkisebb közös többszöröse összes többszörösének osztója mindkét szám.
d) Két szám közös többszöröse nem lehet egyenlő a két számmal.
e) Ha az egyik szám osztója a másik számnak, akkor a legkisebb közös többszörös a másik szám.

8. KÖZÖS OSZTÓ, LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ

1. példa

Írjuk fel a 20 és a 36 összes osztóját! Használjunk osztópárokat!

Megoldás

20 = 1 · 20; tehát osztó az 1 és a 20.
20 = 2 · 10; tehát osztó a 2 és a 10.
20 = 4 · 5; tehát osztó a 4 és az 5.
20 osztói: 1; 2; 4; 5; 10; 20.

36 = 1 · 36; tehát osztó az 1 és a 36.
36 = 2 · 18; tehát osztó a 2 és a 18.
36 = 3 · 12; tehát osztó a 3 és a 12.
36 = 4 · 9; tehát osztó a 4 és a 9.
36 = 6 · 6; tehát osztó a 6.
36 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.

2. példa

Gazsi és Panni 48 autós és 18 lovas matricát oszt szét jutalmul az alsósok között. Igazságosak szeretnének lenni. Azt szeretnék, ha minden jutalmazott gyerek ugyanannyi autós, illetve lovas matricát kapna. Így hány alsós gyereket tudnak jutalmazni? Hány autós és lovas matricát kaphat egy-egy gyerek?

Megoldás

Mivel egyenlően kell elosztani a matricákat a gyerekek között, ezért a jutalmazott gyerekek száma csak olyan lehet, hogy a számuk osztója a 48-nak és a 18-nak is.
A 48 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48.
A 18 osztói: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

A közös osztók: 1, 2; 3; 6. A jutalmazott gyerekek száma csak 1, 2, 3 vagy 6 lehet.

Jutalmazott gyerekek száma	Autós matrica száma/gyerek	Lovas matrica száma/gyerek
1	48	18
2	24	9
3	16	6
6	8	3

A 48-nak és a 18-nak a 6 a **legnagyobb közös osztója**.

Jelölése a kerek zárójel.

Például (48; 18) = 6.

Két szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mind a kettőnek osztója, és a pozitív osztóik közül a legnagyobb.

Mivel az 1 minden egész számnak osztója, ezért bármely két egész számnak van közös osztója, tehát legnagyobb közös osztójuk is van.

3. példa

Egyszerűsítsük a $\frac{24}{36}$ törtet!

Megoldás

A törtet úgy egyszerűsítjük, hogy a számlálóját és a nevezőjét elosztjuk valamelyik közös osztóval. Ezt ismételgetjük, amíg csak találunk 1-nél nagyobb közös osztót.

$$\frac{24}{36} = \frac{\overset{12}{\cancel{24}}}{\underset{18}{\cancel{36}}} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2}{3}.$$

A leghatékonyabbak akkor vagyunk, ha rögtön a legnagyobb közös osztóval egyszerűsítünk. (24; 36) = 12.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3}.$$

A törtet egyetlen lépésben úgy egyszerűsíthetjük, hogy a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával osztjuk a számlálót és a nevezőt.

Feladatok

1. Sorold fel a következő számok osztóit, és legalább öt többszörösét!

a) 17; *b)* 32; *c)* 25; *d)* 24; *e)* 20.

2. Sorold fel a következő számpárok közös osztóit, és jelöld meg a legnagyobb közös osztót!

a) 5 és 15; *b)* 10 és 15; *c)* 24 és 18; *d)* 6 és 12.

3. Megadjuk egy szám két többszörösét. Mi lehetett az eredeti szám?

a) 9 és 15; *b)* 14 és 35; *c)* 5 és 11; *d)* 40 és 60.

4. Határozd meg a következő számpárok legnagyobb közös osztóját!

a) 9 és 15; *b)* 21 és 42; *c)* 12 és 18; *d)* 30 és 18;
e) (100; 60); *f)* (100; 700); *g)* (9; 9); *h)* (1; 5).

5. Határozd meg a következő számhármasok legnagyobb közös osztóját!

a) (10; 20; 30); *b)* (4; 6; 8); *c)* (3; 4; 5); *d)* (21; 42; 48).

6. Egyszerűsítsd a törteket a legnagyobb közös osztójukkal!

a) $\frac{24}{36}$; *b)* $\frac{42}{56}$; *c)* $\frac{12}{20}$; *d)* $\frac{33}{55}$; *e)* $\frac{39}{52}$; *f)* $\frac{36}{45}$.

7. Igaz-e?

a) Két páros számnak a legnagyobb közös osztója is páros.
b) Két páratlan szám legnagyobb közös osztója páratlan.
c) Páros és páratlan szám legnagyobb közös osztója lehet páros.
d) Két szám legnagyobb közös osztójának minden közös osztójuk osztója.
e) A nulla soha nem lehet legnagyobb közös osztó.
f) Két szám közös osztójának nem lehet osztója a két szám.

9. TÖRTEK ÁTTEKINTÉSE

Játék

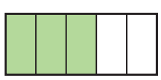
Alakítsatok hatfős csoportokat! Minden tanuló írjon fel egy-egy különböző közönséges törtet a füzetébe!
A tanár felír egy törtet a táblára. Az első a csoportokból menjen a táblához, és adja hozzá a törtjét a tanár által felírthoz.
A második tanuló vonja ki a saját törtjét az előbbi eredményből!
A következő adja hozzá az eredményhez a saját törtjét, és így tovább; felváltva végezzétek el a számításokat. A helyükön ülők ellenőrizzék a táblára írtakat! A nyertes csoport az, amelyik a legelőször végezte el jól a számításokat.

$\frac{3}{5}$ ← számláló, törtvonal, nevező

Ismételjük át a tavaly tanultakat!

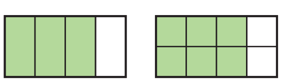
Hogyan értelmezzük a $\frac{3}{5}$-öt?

Ha az egységet 5 egyenlő részre vágjuk, akkor ebből 3 rész vagy 3 egész 5-öd része.

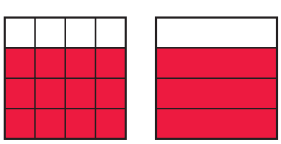


A $\frac{3}{5}$ két egész szám hányadosa, vagyis **racionális szám.**

Ha a tört nevezőjében 1 áll, akkor az **egész szám** $\left(\frac{3}{1} = 3 \text{ vagy } 5 = \frac{5}{1}\right)$.



A törtet **bővíthetjük,** vagyis ugyanazzal a (nem 0) számmal szorozhatjuk a számlálóját és a nevezőjét. Például: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$. A tört értéke nem változik.



A törtet **egyszerűsíthetjük,** vagyis számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a (nem 0) számmal oszthatjuk. Például: $\frac{12}{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$. A tört értéke nem változik.

Milyen műveleteket végezhetünk törtekkel?

Egy törtet **megszorozhatunk egy egész számmal.**

Például:
$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

A szorzás tényezői felcserélhetők: $\frac{3}{4} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{3}{4}$.

Egy **törtet eloszthatunk egy egész (nem 0) számmal,** vagyis a tört nevezőjét megszorozzuk az egész számmal.

Például:
$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Az osztandót és az osztót nem cserélhetjük fel. Például: $\frac{3}{4} : 5 \neq 5 : \frac{3}{4}$.

Két törtet **összeadhatunk.** Közös nevezőre hozzuk őket, majd a számlálókat összeadjuk.

Például:
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

Az összeg tagjait felcserélhetjük.

Például:
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$.

Két törtet **kivonhatunk** egymásból. Közös nevezőre hozzuk őket, majd a kisebbítendő számlálójából kivonjuk a kivonandó számlálóját.

Például: $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$.

A különbség tagjait nem cserélhetjük fel.

Például: $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

Két törtet **összehasonlíthatunk** egymással. Közös nevezőre hozzuk őket, és a számlálókat hasonlítjuk össze, vagy átalakítjuk a törteket, hogy azonos legyen a számlálójuk, és a nevezőjüket hasonlítjuk össze.

Például: $\frac{4}{6}>\frac{3}{6}$; $\frac{2}{3}>\frac{2}{4}$.

Feladatok

1. Egyszerűsítsd a következő törteket, majd bővítsd őket úgy, hogy a nevezőjük 60 legyen!

Például: $\frac{52}{65}=\frac{4}{5}=\frac{48}{60}$.

a) $\frac{12}{18}$; *b)* $-\frac{21}{28}$; *c)* $-\frac{10}{25}$; *d)* $\frac{72}{54}$; *e)* $-5\frac{13}{65}$; *f)* $4\frac{18}{27}$.

2. Igaz vagy hamis?

a) A tört számlálója lehet 0.
b) A tört nevezője lehet 0.
c) A tört nevezője a törtvonal feletti szám.
d) A tört nevezője megmutatja, hogy hány részre osztjuk az egészet.
e) A $\frac{11}{8}$-hoz $\frac{3}{8}$-ot kell adni, hogy 1-et kapjunk.
f) Az $\frac{5}{4}$ és a $-\frac{40}{34}$ tört egyenlő. *g)* $\frac{5}{4}>\frac{6}{4}$. *h)* $\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$.

3. Mi kerülhet a △ helyébe?

a) $\frac{4}{6}+\frac{\triangle}{6}=2$; $\frac{5}{2}+\frac{\triangle}{2}=2$; $\frac{7}{12}+\frac{\triangle}{12}=2$; $\frac{11}{4}+\frac{\triangle}{4}=2$;
b) $\frac{5}{3}+\frac{\triangle}{3}=5$; $\frac{12}{1}+\frac{\triangle}{1}=5$; $\frac{11}{2}+\frac{\triangle}{2}=5$; $\frac{7}{4}+\frac{\triangle}{4}=5$;
c) $\frac{5}{7}+\frac{\triangle}{7}=-1$; $\frac{9}{8}+\frac{\triangle}{8}=-1$; $\frac{1}{11}+\frac{\triangle}{11}=-2$; $\frac{5}{6}+\frac{\triangle}{6}=-2$.

4. Melyik nagyobb?

a) $\frac{3}{4}$ fele vagy $\frac{1}{8}$ duplája? *b)* $\frac{3}{4}$ harmada vagy $\frac{1}{8}$ duplája?
c) $\frac{6}{5}$ fele vagy $\frac{1}{10}$ duplája? *d)* $\frac{6}{5}$ harmada vagy $\frac{1}{10}$ duplája?
e) $1\frac{5}{7}$ fele vagy $\frac{3}{14}$ duplája? *f)* $1\frac{5}{7}$ hatoda vagy $\frac{6}{7}$ fele?

5. Minden feladatrészben keresd meg az egyenlőket!

a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$; $\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}$;

b) $\frac{2}{4}-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}-\frac{5}{10}$; $\frac{2}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}-\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$.

6. A királykisasszony hét próbája

Törtország királyának volt egy szép és az okosságáról messze földön híres lánya, Törtilla. Matematikafeladatokban senki sem volt jobb nála. A király kijelentette tanácsadóinak, hogy csak az maradhat továbbra is nagy méltóságú hivatalában, aki megoldja Törtilla 7 próbáját. (A füzetedben számolj!)

1. próba: Egyszerűsítsd a következő törteket, majd állítsd növekvő sorrendbe őket!

$-\frac{2}{10}$; $\frac{6}{36}$; $-\frac{9}{6}$; $\frac{14}{60}$; $-\frac{14}{35}$; $\frac{63}{70}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{25}{5}$; $-\frac{1200}{10}$.

2. próba: Mely összegek eredménye egyenlő?

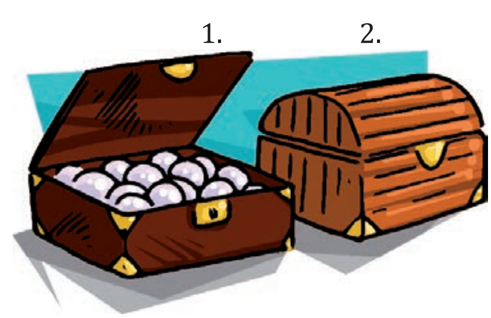
a) $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}$; *b)* $\frac{1}{5}+\frac{6}{15}$; *c)* $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}$; *d)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{2}$; *e)* $\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$; *f)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$.

3. próba: Melyik kivonás eredménye kisebb $\frac{37}{60}$-nál?

a) $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$; *b)* $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}$; *c)* $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$; *d)* $\frac{19}{20}-\frac{5}{12}$.

4. próba: – A nyakláncom hányadrészét tartom a kezemben? – kérdezte a királykisasszony. – Ha megszoroznám 5-tel és osztanám 3-mal, akkor a nyakláncom $\frac{10}{21}$-ed része lenne a kezemben?

5. próba: A főszakács a megmaradt torta $\frac{15}{24}$-ed részét az 5 kukta között egyenlően elosztotta. A torta hányad részét kapta egy-egy kukta?



6. próba: – E két dobozban igazgyöngyöket tartok. Az első dobozban 13 egyforma igazgyöngy van, és értékük összesen 25 tallér. A második dobozban 9 ugyancsak egyforma igazgyöngy van 20 tallér értékben. Melyik dobozban értékesebbek az igazgyöngyök?

7. próba: Számítsd ki sorban a műveletek eredményét!

$\frac{15}{24} \xrightarrow{\cdot\, 2}$ ……….. $\xrightarrow{:\, 3}$ ……….. $\xrightarrow{+\frac{2}{9}}$ ……….. $\xrightarrow{-\frac{11}{36}}$ ………..

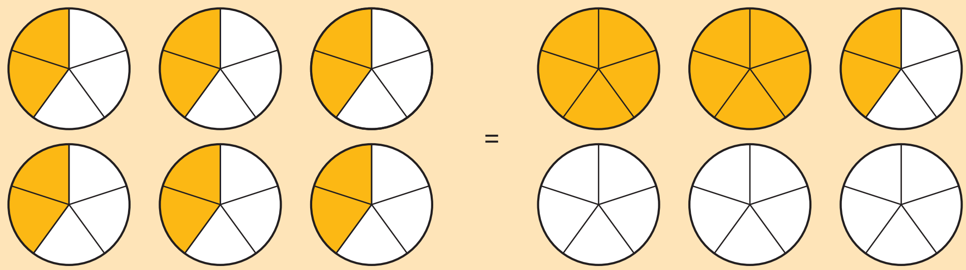
(A végén 25 tanácsadóból csak 10 maradt. A többieket azóta is Törtilla tanítja.)

1. példa

Szorozzuk meg $\frac{2}{5}$-öt 6-tal!

Megoldás

$\frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$.

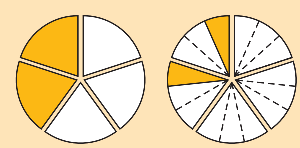


2. példa

Mennyi lesz az eredmény, ha a $\frac{2}{5}$-öt szorozzuk az $\frac{1}{3}$-dal?

Megoldás

A $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ azt jelenti, hogy a $\frac{2}{5}$-nek vesszük az $\frac{1}{3}$ részét, vagyis a 2 darab 5-öd részt felosztjuk 3-3 részre, és a kisebb részekből veszünk egyet-egyet. Az eredmény $\frac{2}{15}$.



A nevezőket csak össze kell szorozni! $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$; $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$.

Ha az egészet osztottuk volna fel, akkor $\frac{1}{15}$-ök lennének, amiből 2 részt veszünk.

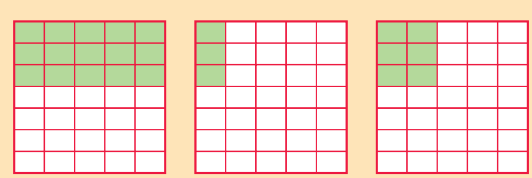
3. példa

Mennyi lesz a $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$ szorzás eredménye?

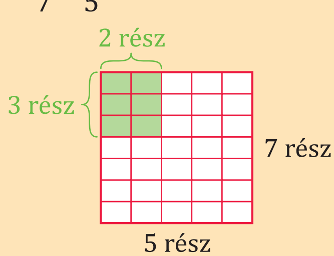
Megoldás

A nevezők szorzata azt mutatja meg, hogy hány részre osztottuk fel a négyzetet. $7 \cdot 5 = 35$ részre. A számlálók szorzata, $3 \cdot 2$ pedig azt, hogy hány rész van ezekből.

A $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$ szorzat eredménye az ábra alapján $\frac{6}{35}$.



$\frac{3}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$ $\qquad$ $\frac{3}{35} \cdot 2 = \frac{6}{35}$



Tekintsük az egységnégyzetet, amelynek minden oldala 1.
Egyik oldala mentén 7, a másik oldala mentén 5 egyenlő részre osztjuk fel: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

A törtek szorzásánál, az eredményben, a számlálók szorzata lesz a számláló, és a nevezők szorzata lesz a nevező.

10. TÖRT SZORZÁSA

4. példa

A Kincses-szigeten két kalózhorda éjt nappá téve kereste az elásott kincset, de az aranyérméknek csak a $\frac{2}{3}$ részét ásták ki. A megtalált érméket elosztották a két kalózcsapat között, és az egyes csapatok a tagok között is felosztották a nekik járó részt. Az elásott kincs hányad része jutott a hajóinasnak, ha a csapata a megtalált érmék $\frac{2}{5}$ részét kapta, és a csapaton belül az $\frac{1}{6}$ rész jutott neki?

Megoldás

A megtalált kincs $\frac{2}{5}$ részének az $\frac{1}{6}$ része, $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ rész. Az inas a teljes kincs $\frac{2}{3}$ részének az $\frac{1}{15}$-ét kapta meg, vagyis $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{45}$ részt kapott. A hajósinasnak a teljes kincs $\frac{2}{45}$ része jut.

Feladatok

A következő 5 feladatban számold ki a szorzatokat!

1. *a)* $\frac{2}{3}\cdot 3$; *b)* $\frac{4}{7}\cdot 7$; *c)* $\frac{3}{2}\cdot 2$; *d)* $\frac{7}{5}\cdot 5$; *e)* $\frac{11}{12}\cdot 12$; *f)* $\frac{4}{9}\cdot 4$;
g) $\frac{2}{3}\cdot 12$; *h)* $\frac{4}{7}\cdot 21$; *i)* $\frac{3}{2}\cdot 6$; *j)* $\frac{7}{5}\cdot 40$; *k)* $\frac{11}{12}\cdot 48$; *l)* $\frac{4}{9}\cdot 12$.

2. *a)* $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4}$; *d)* $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{5}$; *e)* $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}$;
f) $\frac{14}{11}\cdot\frac{3}{8}$; *g)* $\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}$; *h)* $\frac{6}{15}\cdot\frac{2}{9}$; *i)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}$; *j)* $\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{6}$.

3. *a)* $\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}$; *b)* $\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{7}$; *c)* $\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}$; *e)* $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}$;
f) $1\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{7}$; *g)* $\frac{5}{14}\cdot 2\frac{1}{3}$; *h)* $3\frac{3}{4}\cdot 4\frac{3}{5}$; *i)* $3\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{14}$; *j)* $7\frac{1}{2}\cdot 5\frac{5}{6}$.

4. *a)* $9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$; *b)* $\frac{2}{5}\cdot 12$; *c)* $(-4)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$; *d)* $(-5)\cdot\frac{3}{9}$; *e)* $\frac{11}{1}\cdot 4$; *f)* $\frac{7}{6}\cdot(-4)$.

5. *a)* $\frac{9}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$; *b)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{12}$; *c)* $\left(-\frac{4}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$; *d)* $\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{3}{9}$; *e)* $\frac{7}{13}\cdot\frac{13}{7}$; *f)* $\frac{7}{6}\cdot\left(-\frac{4}{18}\right)$.

6. Mely számot írhatjuk a háromszög helyére, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{\triangle}{2}=\frac{15}{14}$. *b)* $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{11}=\frac{15}{\triangle}$. *c)* $\frac{13}{44}<\frac{5}{11}\cdot\frac{\triangle}{4}$ és $\frac{5}{11}\cdot\frac{\triangle}{4}<\frac{31}{44}$.

d) Mennyi $\frac{14}{11}$ három huszonnyolcad része? *e)* Mennyi $\frac{24}{5}$ hét tizenketted része?

Mennyivel kell megszorozni $\frac{4}{5}$-öt, hogy 1-et kapjunk?

Olyan törttel kell megszorozni a $\frac{4}{5}$-öt, hogy a szorzat számlálója és nevezője ugyanaz legyen.

Ez a szám az $\frac{5}{4}$, mert ekkor $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$.

Ha két szám szorzata 1, akkor a számokat egymás reciprokainak nevezzük.

Például: $\frac{4}{5}$ reciproka $\frac{5}{4}$, 2 reciproka $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{7}$ reciproka $-\frac{7}{3}$.

A 0-nak nincs reciproka. (Mert a 0-t bármelyik számmal megszorozva 0-t kapunk.)
1-nek a reciproka 1, és –1-nek a reciproka –1.

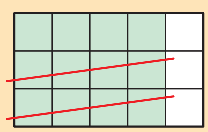
1. példa

a) $\frac{4}{5}$-ben hányszor van meg a 3?

b) $\frac{4}{5}$-ben hányszor van meg a 2?

Megoldás

a) Sajnos nem tudjuk a számlálót osztani. Bővítsük a törtet 3-mal, hogy tudjunk osztani.

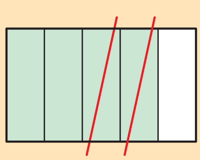


$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot 3} : \cancel{3} = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

Láthatjuk, hogy a nevezőt szoroztuk hárommal.

b) I. módszer

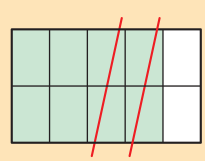
A 4 darab ötöd fele 2 darab ötöd, azaz elosztottuk a számlálót.



$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$$

II. módszer

Ha a nevezőt szorozzuk kettővel, akkor



$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{10}$$

Mindkét megoldás ugyanazt az eredményt adja.

2. példa

Hány gyereknek elég 2 pizza, ha mindenki $\frac{1}{4}$ pizzát kap?

Megoldás

$? \cdot \frac{1}{4} = 2$ $\qquad 2 : \frac{1}{4} = ?$ $\qquad 2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot 4 = 8$

8 gyereknek jut egy-egy negyed 2 pizzából.

11. RECIPROK, OSZTÁS TÖRTTEL

3. példa

Mennyi $\frac{7}{3} : \frac{2}{5}$?

Megoldás

Keressük azt a számot, amelyet $\frac{2}{5}$-del megszorozva, $\frac{7}{3}$-ot kapunk.

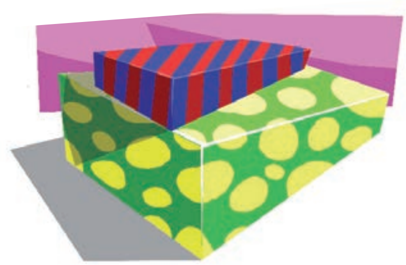
Ha a $\frac{2}{5}$-öt megszorozzuk a reciprokával, $\frac{5}{2}$-del, akkor 1-et kapunk, amelyet csak meg kell szorozni $\frac{7}{3}$-dal, hogy a kívánt hányadost kapjuk.

$$\frac{7}{3} : \frac{2}{5} = \square \iff \frac{7}{3} = \square \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2} = \square \cdot \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}}_{1} = \square$$

Közönséges törttel úgy osztunk, hogy az osztandót szorozzuk az osztó reciprokával.



4. példa

Egy díszdoboz teteje $\frac{3}{32}$ négyzetméter területű téglalap, amelynek az egyik oldala $\frac{2}{5}$ méter. Mekkora a másik oldala?

Megoldás

Azt keressük, hogy mennyivel kell megszorozni $\frac{2}{5}$ métert, hogy $\frac{3}{32}$ négyzetmétert kapjunk.

$\frac{3}{32} : \frac{2}{5} = \frac{3}{32} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{64}$ méter a másik oldal.

Feladatok

1. Végezd el a következő osztásokat!

a) $\frac{9}{5} : 3$; *b)* $\frac{36}{7} : 100$; *c)* $\frac{18}{7} : 4$; *d)* $\frac{35}{18} : 10$; *e)* $\frac{18}{7} : 6$;

f) $\frac{45}{8} : 10$; *g)* $\frac{24}{5} : 12$; *h)* $\frac{36}{25} : 18$; *i)* $\frac{8}{9} : 100$; *j)* $\frac{42}{25} : 21$.

2. Váltsd át a következő mennyiségeket!

a) $\frac{50}{9}$ milliméter hány centiméter, deciméter és méter?

b) $\frac{750}{7}$ milliméter hány centiméter, deciméter és méter?

c) $\frac{250}{3}$ milliliter hány centiliter, deciliter és liter?

d) $\frac{1250}{2}$ gramm hány dekagramm és kilogramm?

3. Mi a reciproka a következő számoknak?

a) $\frac{2}{3}$; *b)* $-\frac{5}{3}$; *c)* $\frac{6}{5}$; *d)* $-\frac{2}{7}$; *e)* 0; *f)* 1;

g) $-\frac{1}{5}$; *h)* 3; *i)* $\frac{0}{5}$; *j)* −1; *k)* −6; *l)* $\frac{1}{7}$;

m) $2\frac{6}{7}$; *n)* $1\frac{2}{5}$; *o)* $-2\frac{3}{8}$; *p)* $-7\frac{2}{3}$; *q)* 10; *r)* −11.

4. Válaszolj a kérdésekre!

a) Mennyivel kell szorozni $\frac{4}{5}$-öt, hogy 1-et kapjunk?

b) Mennyivel kell szorozni $\frac{7}{4}$-et, hogy 1-et kapjunk?

c) Mennyivel kell szorozni $\frac{13}{6}$-ot, hogy 2-t kapjunk?

d) Mennyivel kell szorozni $\frac{8}{15}$-öt, hogy 3-at kapjunk?

e) Mennyivel kell szorozni $\frac{7}{3}$-ot, hogy 4-et kapjunk?

5. Végezd el a következő osztásokat! Ha lehet, egyszerűsíts!

a) $\frac{5}{4} : \frac{2}{3}$; *b)* $\frac{1}{9} : \frac{1}{3}$; *c)* $\frac{8}{9} : \frac{5}{6}$; *d)* $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$;

e) $\frac{7}{13} : \frac{28}{11}$; *f)* $3\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; *g)* $\frac{7}{10} : 1\frac{1}{8}$; *h)* $1\frac{2}{25} : 1\frac{4}{5}$;

i) $5 : 4\frac{1}{6}$; *j)* $7 : \frac{1}{3}$; *k)* $8 : 2\frac{4}{7}$; *l)* $1 : \frac{3}{5}$.

6.

a) A téglalap egyik oldala $\frac{4}{3}$ deciméter. Mekkora a másik oldala, ha a területe 2 dm^2?

b) A téglalap egyik oldala $\frac{5}{4}$ deciméter. Mekkora a másik oldala, ha a területe $\frac{15}{8}$ dm^2?

7. Az énekkaros lányok hajába egyforma hosszú szalagot szeretnének kötni az iskolai műsoron. Egy szalag hossza $\frac{5}{7}$ méter. Hány szalag készülhet 10 méter anyagból?

8. Az énekkaros lányok szoprán szólamában éneklő lányok hajának hossza: $\frac{1}{6}$ méter, $\frac{1}{6}$ méter, $\frac{1}{4}$ méter, $\frac{1}{5}$ méter, $\frac{1}{5}$ méter, $\frac{1}{4}$ méter $\frac{2}{5}$ méter, $\frac{2}{5}$ méter, $\frac{3}{5}$ méter és $\frac{3}{4}$ méter.

a) Hány tagja van a szoprán szólamnak?
b) Átlagosan mekkora a hajhosszuk?
c) Mekkora lenne az átlagos hajhosszuk cm-ben mérve, ha mindegyik lánynak 10 cm-t nőne a haja?

12. SZORZÁS TIZEDES TÖRTTEL

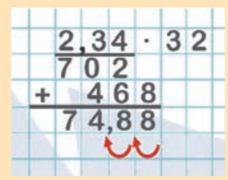
Tizedes törtet már tavaly is szoroztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, illetve egész számmal.
Ismétlés:
10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. úgy szorzunk meg tizedes törteket, hogy a tizedes törtben a tizedesvesszőt 1, 2, 3 stb. helyiértékkel jobbra visszük.

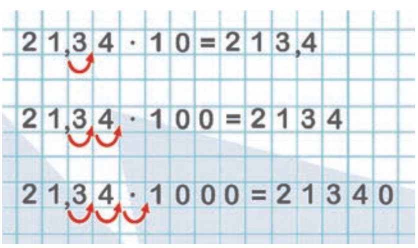
1. példa

A Mohos-tőzeglápba terveznek egy új látogatási útvonalat. A kirándulók 32 fapallóból álló hídon mehetnének be az érdekes területre. Milyen hosszú a híd, ha egy fapalló 2,34 méter?
Tervezik, hogy a palló melletti táblára kiírják az útvonal hosszát. Te mit írnál rá?

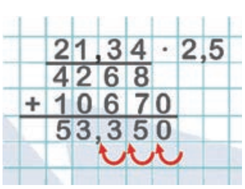
Megoldás

Szorozzuk meg a 2,34-et 32-vel!
A híd hossza 74,88 méter.
A táblára ezt írnánk: 75 m.





Tizedes törtet egész számmal úgy szorzunk, mintha mindkét szám egész lenne, majd a szorzatban annyi tizedesjegyet veszünk (a tizedesvesszőt annyi helyiértékkel visszük balra), mint amennyi a törtben volt.



2. példa

Egy cölöpökre állított téglalap alakú látogatói teraszt is terveznek, amelynek hossza 21,34 méter, szélessége 2,5 méter. Mekkora a terasz területe?

Megoldás

Írjuk át a tizedes törteket közönséges törtekké: $21{,}34 \cdot 2{,}5 = \frac{2134}{100} \cdot \frac{25}{10}$.

Végezzük el a közönséges törtek szorzását: $\frac{2134}{100} \cdot \frac{25}{10} = \frac{53\,350}{1000}$.

Alkalmazzuk az 1000-rel való osztásnál tanultakat, és léptessük a számlálóban a tizedesvesszőt hárommal balra: $\frac{53\,350}{1000} = 53\,350 : 1000 = 53{,}350$.

Vagyis a terasz területe: $53{,}35\ \text{m}^2$.

A tizedes törtek szorzásának szabálya:
Két tizedes törtet úgy szorzunk össze, mintha egész számok lennének, majd a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk, amennyi a két tényezőben összesen volt.

Feladatok

1. Végezd el a szorzásokat! Ebben a feladatban kiteheted a tizedesvesszőt akkor is, ha nem lenne rá szükség!

a) $12 \cdot 100$; *b)* $120 \cdot 10$; *c)* $1,2 \cdot 1000$; *d)* $0,12 \cdot 10\,000$; *e)* $0,0012 \cdot 1\,000\,000$;
f) $1,25 \cdot 100$; *g)* $1,25 \cdot 1000$; *h)* $15,625 \cdot 100$; *i)* $15,625 \cdot 1000$; *j)* $15,625 \cdot 10\,000$.

2. *a)* 0,23 milliméter vastag papírlapból egymásra teszünk 5-öt, 10-et, 23-at, 79-et, 100-at, illetve 348-at. Milyen vastag papírkötegeket kapunk?
b) Milyen vastag a pénztárszalag, ha a papír vastagsága 0,34 milliméter és 14, 50, 89, 120, 345 menetet tartalmaz?

3. *a)* Milyen vastag a 0,125 méter vastag fal deciméterben, centiméterben, illetve milliméterben?
b) Egy süteménybe 0,078 kg liszt szükséges. Mennyi liszt kell 6, 12, 35, 43 darab sütemény elkészítéséhez?
c) A kémialaboratóriumban 2,27 milliliterenként öntik le a kiválasztott elixírt egy lombikba. 27 öntés után mennyi elixír lesz a lombikban összesen?

4. Alakítsd át közönséges törtté a felsorolt tizedes törteket! Ha lehet, egyszerűsíts! Használhatsz vegyesszám-alakot is!

a) 1,2; *b)* 13,25; *c)* –5,6; *d)* –3,5; *e)* 0,123;
f) 2,775; *g)* –100,1; *h)* 7,02; *i)* 3,17; *j)* 9,99.

5. Végezd el a szorzásokat!

a) $0,6 \cdot 1,2$; *b)* $7,25 \cdot 4,2$; *c)* $7,6 \cdot 0,3$; *d)* $4,3 \cdot 5,3$; *e)* $0,12 \cdot 0,95$;
f) $5,71 \cdot 7,2$; *g)* $0,317 \cdot 1,25$; *h)* $2,34 \cdot 35,5$; *i)* $12,5 \cdot 3,98$; *j)* $0,0123 \cdot 502,7$.

6. *a)* A füvesítés négyzetméterenként 500 forintba kerül. Mennyibe kerül 200,65 négyzetméter terület füvesítése?
b) 1 liter üzemanyag 401,9 forintba kerül. Mennyibe kerül 23,56 liter üzemanyag?

7. *a)* Hányszor kell megszorozni 625-öt 0,2-del, hogy 1-et kapjunk?
b) Hányszor kell megszorozni 32-t 0,5-del, hogy 1-et kapjunk?

8. 1 deciliter tejhez 4,56 gramm kakaóport ajánlott keverni. Mennyi kakaópor szükséges 2,6 deciliter tejhez?

9. Hány négyzetméter területű a téglalap alakú szőnyeg, ha oldalai 1,85 méter és 2,6 méter hosszúak?

10. A benzinkútnál a kijelző szerint 1 liter benzin 326,9 Ft, és Zsiga 18,88 litert tankolt. Mekkora a kiírt fizetendő összeg, és mennyit fizetett Zsiga készpénzzel?

13. OSZTÁS TIZEDES TÖRTTEL

Tizedes törtet úgy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb., hogy a tizedesvesszőt 1, 2, 3 stb. helyiértékkel balra visszük.

2,1,3 : 1 0 = 2,1 3

2,1,3 : 1 0 0 = 0,2 1 3

2,1,3 : 1 0 0 0 = 0,0 2 1 3

1. példa

Vettünk egy kürtőskalácsot és egyenlő részekre akartuk osztani a család 5 tagja között. Lilla azt javasolta, hogy tekerjük le és számoljuk ki, milyen hosszú rész jut egy-egy embernek. A letekert kalács 1,8 méter hosszú csík lett. Milyen hosszú csíkot kapott Lilla?

Megoldás

1,8 : 5 = 0,36
18
 30

Tehát Lillának 0,36 m, azaz 36 cm hosszú kürtőskalács-csík jutott.

Tizedes törtet egész számmal úgy osztunk, mintha egész szám volna. Amikor a tizedesvesszőhöz érünk, akkor a hányadosban is kitesszük a tizedesvesszőt.

2. példa

Osztálydekorálás alkalmával Zsombi A4-es papírlapból 3,3 cm széles és 21 cm hosszú csíkokat vág le. Az A4-es méretű lap hosszabb oldala 29,7 cm hosszú, a rövidebb pedig 21 cm. Egy papírból maximum hány csíkot vághat le?

Megoldás

2 9,7 : 3,3 = 2 9 7 : 3 3

A 29,7-et el kell osztani 3,3-del.

297 : 33 = 9.
   0

Zsombi maximum 9 csíkra vágta a papírlapot.

Tizedes törtet tizedes törttel úgy osztunk, hogy az osztandóban és az osztóban a tizedesvesszőt ugyanannyi helyiértékkel léptetjük jobbra, míg az osztó egész szám nem lesz, és elvégezzük az osztást.

Feladatok

1. A törtátíró verseny második fordulójába csak az juthatott, aki az öt tört közül legalább négyet két tizedesjegyre kerekített tizedes tört alakba írt át. Szerinted Gerzson bekerült a második fordulóba?

a) $\frac{256}{29} \approx 8{,}83$; *b)* $\frac{56}{89} \approx 0{,}63$; *c)* $\frac{35}{21} \approx 1{,}67$; *d)* $\frac{40}{13} \approx 3{,}15$; *e)* $\frac{125}{300} \approx 0{,}42$.

2. *a)* Milyen nehéz egy kisautó, ha 5 darab 6,5 dekagramm?
b) Milyen nehéz egy borsószem, ha 13 darab 17,55 gramm?

3. *a)* Hány darab ceruzát állítottak sorba a gyerekek, ha 6,237 méter hosszú sort kaptak, és egy ceruza 0,231 méter?
b) Hány szem meggy lehet az 54,18 dekagramm tömegű zacskóban, ha egy szem tömege 0,43 dekagramm?
c) A gyár kapujában lévő mérleg a ráálló autók tömegét tonnában méri meg. A gyárba érkező üres teherautó tömege 1,923 tonna. Az alkatrésszel megrakott, távozó teherautó tömege 3,467 tonna. Hány darab alkatrész volt rajta, ha egy darab tömege 0,193 tonna?

4. Állítsd növekvő sorrendbe a következő hányadosokat!
A) 70,564 : 5,2; B) 140,286 : 10,3; C) 32,472 : 2,4; D) 6,8799 : 0,51.

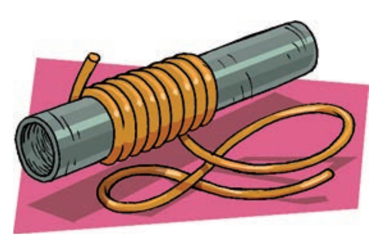
5. *a)* A Velencei-tó körüli kerékpárút 30,75 kilométer. Mennyi idő alatt kerüli meg a tavat az a kerékpáros, aki óránként 12,5 kilométert tesz meg?
b) 494,78 m^2 a téglalap alakú telek területe, a szélessége 14,3 méter. Milyen hosszú a telek?
c) Az „Öleld meg a Dunát" akció a környezetvédelemről szólt. Az emberek élőláncot alkottak a Szabadság híd és az Erzsébet híd között. Hány ember alkotta a láncot, ha a két híd távolsága 1,4 km, és egy ember 1,5 m-t jelent? (A Duna mindkét partján kialakult lánc.)

6. A téglalap alakú szőnyeg területe 3,1875 négyzetméter. Az egyik oldala 2,55 méter. Mekkora a szőnyeg másik oldala?

7. A téglalap alakú utat kockakövekkel borították. Egy kockakő éle 6,8 cm.
a) Hány kockakő szélességű a 7,208 méter széles út?
b) Hány kockakő hosszúságú az 51,408 méter hosszúságú út?
c) Összesen hány kockakövet raktak le?

8. A függönykarikák közötti távolság 10,25 cm. Hány függönykarika van, ha a függöny egy 1,435 méter széles ablakot takar?

9. Egy vasúti sínszál 11,2 méter hosszú. Hány sínszál található az 5,1072 kilométer hosszú szakaszon?

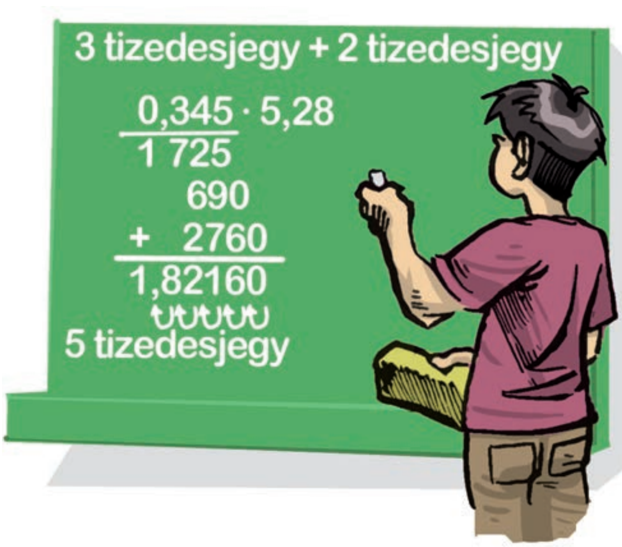


10. A díszkorláton a rézhuzalt szorosan egymás mellé tekercselték. A rézdrót 1,16 milliméter átmérőjű. A tekercselt rész 29 centiméter hosszú. Körülbelül hány menetes a tekercs?

14. ÖSSZEFOGLALÁS

Egy (nem nulla) szám reciproka az a szám, amelyikkel az eredeti számot megszorozva 1 lesz a végeredmény.
Egy közönséges tört esetén a reciprok képzésénél a tört számlálója és nevezője helyet cserél.

Egy tört törttel való szorzásánál a szorzat számlálója a számlálók szorzata lesz, a nevezője pedig a nevezők szorzata.
Például:
$\frac{32}{15} \cdot \frac{25}{8} = \frac{32 \cdot 25}{15 \cdot 8} = \frac{800}{120} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$.



Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorozzuk az osztandót.
Például:
$\frac{4}{9} : \frac{10}{21} = \frac{4}{9} \cdot \frac{21}{10} = \frac{14}{15}$.

A tizedes törtekkel úgy szorzunk, mintha egész számok lennének, csak a szorzat végén lévő tizedesvesszőt annyival balra léptetjük, mint a két tényezőben lévő tizedesjegyek száma.

Az osztóban a tizedesvesszőt addig léptetjük jobbra, amíg egész szám nem lesz. Az osztandóban pontosan ugyanannyiszor léptetjük a tizedesvesszőt jobbra, majd elvégezzük az osztást.

Feladatok

1. Hány 60 és hány –60 eredményű művelet található az alábbiak között?
(–2) · (–30); (–2) · (–3) · (–10); (+180) : (–3); (–5) · (–12) · (–1);
(–720) : (+4) : (–3); (+5) · (–2) · (–6); (+30) · (+8) : (–4); (–1) · (–1) · (+60).

2. Végezd el a következő műveleteket!
a) (–15) · (+4) : (–5); *b)* (–120) : [(–4) · (+6)];
c) [(+180) : (–15)] · [(–50) : (–25)]; *d)* (–3) · (–3) · (–3) · (–3).

3. Osztható-e 2-vel, 4-gyel, 8-cal?
a) 421 658; *b)* 991 944; *c)* 51 848; *d)* 66 356.

4. Osztható-e 5-tel, 25-tel, 125-tel?
a) 56 705; *b)* 5 678 450; *c)* 456 125; *d)* 456 750.

5. Osztható-e 3-mal, 9-cel?
a) 68 895; *b)* 456 798; *c)* 1 134 567; *d)* 76 222.

6. Osztható-e 6-tal, 12-vel, 15-tel?

a) 547 632; *b)* 345 645; *c)* 51 845; *d)* 66 420.

7. Egy számról tudjuk, hogy osztható 12-vel. Milyen számokkal osztható még biztosan?

8. Mivel osztható biztosan az a szám, amely számjegyeinek összege 27, és 0-ra végződik?

9. Az öt állítás közül az egyik nem igaz. Melyik?

a) A prímszámnak pontosan két pozitív osztója van.
Az 1 és a 0 nem prímszám.
Az összetett számok olyan nem nulla egészek, amelyeknek kettőnél több osztójuk van.
A 0 összetett szám.
A 33 összetett szám.

b) A legnagyobb közös osztó a közös osztók közül a legnagyobb.
A legkisebb közös többszörös a közös többszörösök közül a legnagyobb.
0-nak 0 az ellentettje.
–3-nak +3 az ellentettje.
Két azonos előjelű, nem nulla szám szorzata biztosan pozitív.

c) Ha az egész szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.
Ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel, akkor a szám is osztható 4-gyel.
Ha egy szám osztható 6-tal, akkor a számjegyeinek összege osztható 3-mal és páros számjegyre végződik.
Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 12-vel is.
Ha egy szám osztható 5-tel, akkor 0-ra vagy 5-re végződik.

10. Egy számról tudjuk, hogy az utolsó két számjegyéből álló szám 20. Mivel osztható biztosan?

11. Határozd meg az alábbi természetes számok prímtényezős felbontását! Melyek prímszámok?

a) 1; *b)* 31; *c)* 57; *d)* 0;
e) 39; *f)* 180; *g)* 1024; *h)* 1080.

12. Határozd meg a természetes számok osztóit, és írd fel három darab többszörösüket!

a) 6; *b)* 9; *c)* 24; *d)* 50.

13. *a)* Készíts 2-vel osztható négyjegyű számokat ezekből a számkártyákból!
b) Készíts 5-tel osztható négyjegyű számokat ezekből a számkártyákból!
c) Készíts 3-mal osztható négyjegyű számot ezekből a számkártyákból!
d) Készítsd el a 3-mal osztható összes háromjegyű számot ezekből a számkártyákból!

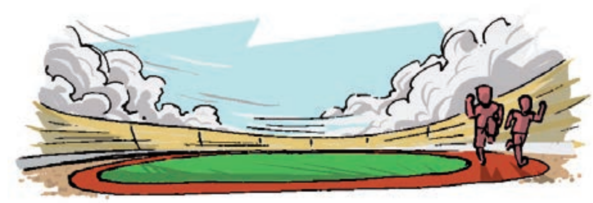
14. Határozd meg a két szám legkisebb közös többszörösét!

a) [5; 4]; *b)* [9; 6]; *c)* [50; 250]; *d)* [24; 86];
e) [1; 12]; *f)* [3; 12]; *g)* [17; 12]; *h)* [52; 12].

15. Határozd meg a két szám legnagyobb közös osztóját!

a) (6; 1); *b)* (9; 27); *c)* (6; 82); *d)* (231; 132);
e) (8; 9); *f)* (8; 512); *g)* (9; 512); *h)* (442; 364).

16. Két futó edz a körpályán. Egyszerre indultak. Az egyik 10 percenként két kört tesz meg, a másik pedig 3 kört. Indulás után mikor haladnak át először egyszerre az indulási helyen?



17. Egy rejtvényújságban egymás mellett két, egymáshoz nagyon hasonló rajz található, amelyek között 21 apró eltérés van. Először Anna nézte meg, és 11 eltérést talált. Másodiknak Bori nézte meg és 16 eltérést talált, de amikor megbeszélték, kiderült, hogy csak 7 olyan eltérés volt, amelyet mindketten észrevettek.

a) Hány eltérést talált meg csak Anna?
b) Hány eltérést talált meg csak Bori?
c) Hány eltérést nem talált meg egyik lány sem?

18. Adottak az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ és a $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ halmazok.
Add meg a két halmaz

a) metszetét (közös részét);
b) unióját (egyesítettjét)!
c) Add meg B halmaz komplementerét, ha az alaphalmaz a 20-nál kisebb természetes számok halmaza!

19. Melyik szám a legnagyobb?

a) $\frac{3}{11} \cdot \frac{8}{5}$; $\frac{7}{5} : \frac{11}{3}$; $1\frac{2}{5} : 3\frac{2}{3}$;

b) 0,12 : 0,025; 3,84 · 1,25; 1,4 · 3,5.

20. *a)* Ha öt tégla egymásra rakva $\frac{329}{7}$ cm, akkor milyen magas egy tégla? Milyen magas hét tégla?

b) Ha $\frac{2}{7}$ kg liszt ára $\frac{650}{21}$ Ft, akkor mennyibe kerül 1 kg liszt? Mennyibe kerül $\frac{8}{5}$ kg liszt?

c) A lakás közös költsége négyzetméterenként 675,4 forint. A lakás 62,75 négyzetméter. Mennyi a lakás közös költsége?

21. *a)* 0,72 kilogramm lisztből hány süti készíthető, ha egy sütihez 0,12 kilogramm szükséges? Mennyi liszt kell 24 sütihez?

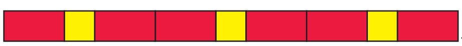
b) A $2\frac{2}{3}$ deciméter hosszú mákos bejglit 20 ugyanolyan vastag szeletre vágjuk. Milyen vastag egy szelet?

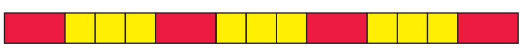
c) Géza egy kört 1,5 perc alatt fut le. Mennyi idő alatt fut Géza két és háromnegyed kört? Hány kört fut le 4,25 perc alatt?

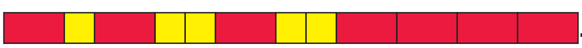
d) Éva az elé táruló 5,25 kilométer hosszú tájat több képpel szeretné megörökíteni. Hány fényképet kell készítenie, ha egy fénykép a tájból 0,75 kilométernyit örökít meg?

e) Egy cső 2,45 méter hosszú. Milyen hosszú a kerti vízvezeték, ha 3 egész és egy fél cső összehegesztésével jut el a vízórától a kerti csapig?

22. A csempéző kisiparos kétféle csempét használ. A piros csempe 25,6 cm, a sárga 12,8 cm hosszú. Milyen hosszú falrészt fednek le a következő minták?

a) ;

b) ;

c) .

23. Végezd el a következő szorzásokat!

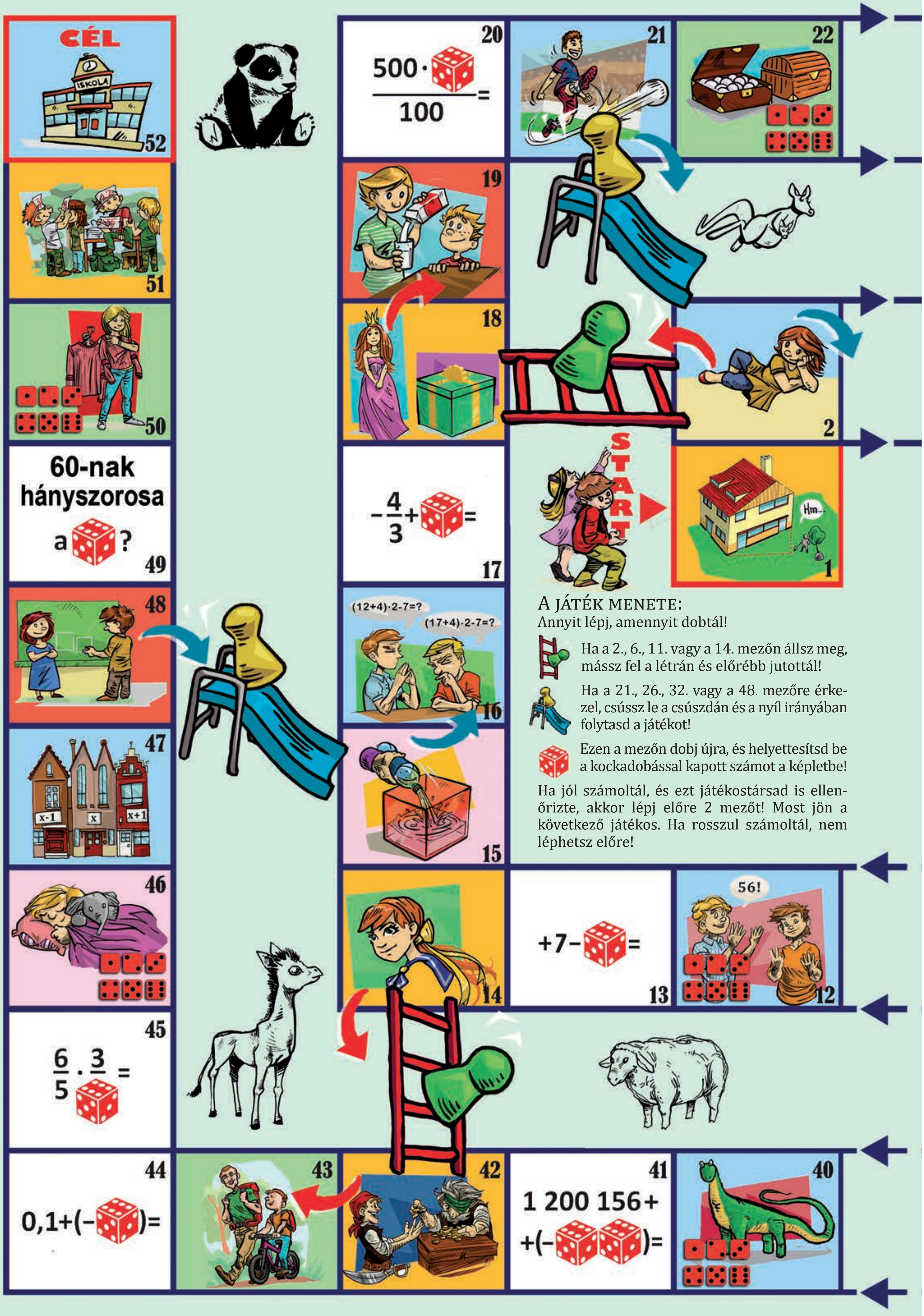
a) $0{,}5 \cdot 0{,}5$; *b)* $0{,}15 \cdot 15$; *c)* $0{,}25 \cdot 2{,}5$; *d)* $(-3{,}5) \cdot 0{,}035$; *e)* $4{,}5 \cdot 4{,}5$;
f) $2{,}5 \cdot 0{,}5$; *g)* $2{,}5 \cdot 0{,}35$; *h)* $(-0{,}15) \cdot (-0{,}25)$; *i)* $0{,}05 \cdot 3{,}5$; *j)* $2{,}5 \cdot 4{,}5$.

24. Végezd el az osztásokat!

a) $2{,}25 : 1{,}5$; *b)* $6{,}25 : 2{,}5$; *c)* $1{,}69 : 1{,}3$; *d)* $(-33{,}015) : 1{,}55$; *e)* $11{,}52 : 4{,}8$;
f) $2{,}7 : 12$; *g)* $2{,}7 : (-0{,}12)$; *h)* $0{,}121401 : 0{,}123$; *i)* $124{,}7 : 1{,}3$.

25. Pisti szobája 4,2 méter hosszú és 2,30 méter széles. Egy laminált parketta mérete $129{,}2 \cdot 19{,}2$ cm.
a) Hány négyzetméter Pisti szobája?
b) Hány négyzetméter egy laminált parketta?
c) Hány darab parketta kell a szoba lefedéséhez?

26. Hárman indulnak el egyszerre a 48 km-re lévő városba. Gáspár bá kocsival megy, az ő sebessége $75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Menyhért vonata 60 km-t tesz meg egy óra alatt. Boldizsár biciklivel megy és a terep dimbes-dombos, úgyhogy ő $11{,}25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad.
a) Mennyi idő alatt ér a városba Gáspár, Menyhért és Boldizsár?
b) Milyen messze van Boldizsár a várostól, amikor Menyhért épp odaér?



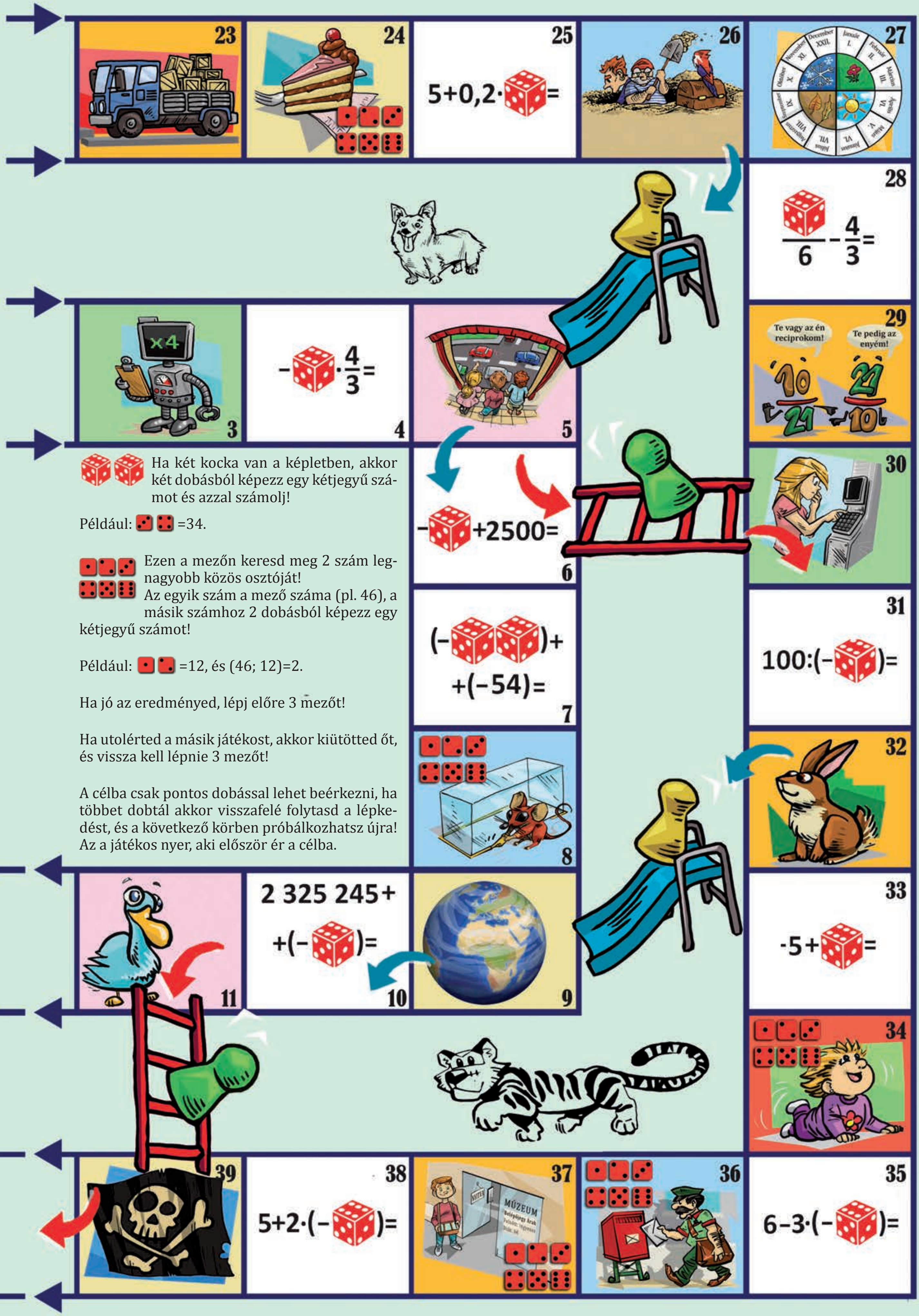
A JÁTÉK MENETE:
Annyit lépj, amennyit dobtál!

Ha a 2., 6., 11. vagy a 14. mezőn állsz meg, mássz fel a létrán és előrébb jutottál!

Ha a 21., 26., 32. vagy a 48. mezőre érkezel, csússz le a csúszdán és a nyíl irányában folytasd a játékot!

Ezen a mezőn dobj újra, és helyettesítsd be a kockadobással kapott számot a képletbe!

Ha jól számoltál, és ezt játékostársad is ellenőrizte, akkor lépj előre 2 mezőt! Most jön a következő játékos. Ha rosszul számoltál, nem léphetsz előre!



Ha két kocka van a képletben, akkor két dobásból képezz egy kétjegyű számot és azzal számolj!

Például: =34.

Ezen a mezőn keresd meg 2 szám legnagyobb közös osztóját!
Az egyik szám a mező száma (pl. 46), a másik számhoz 2 dobásból képezz egy kétjegyű számot!

Például: =12, és (46; 12)=2.

Ha jó az eredményed, lépj előre 3 mezőt!

Ha utolérted a másik játékost, akkor kiütötted őt, és vissza kell lépnie 3 mezőt!

A célba csak pontos dobással lehet beérkezni, ha többet dobtál akkor visszafelé folytasd a lépkedést, és a következő körben próbálkozhatsz újra! Az a játékos nyer, aki először ér a célba.

MEGOLDÁSOK
A *JÁTÉKOS FELADATOK* LECKÉHEZ

Igazmondók–hazudósok
„Holnap igazat fogok mondani.” – Ha ez igaz, akkor a következő hazudós napján is igazat mondana. Tehát ezt egy hazudós napján mondta, s következő nap is hazudós nap kell legyen, mert akkor most nem hazudna. Csak szombaton van ilyen nap.

Összeadás – 4100.

Tréfa
Ha Emese igazat mond, akkor Péter hazudik, de akkor Tamás igazat mond, ami nem lehet, hiszen Tamás szerint Emese hazudik.
Ha Emese hazudik, akkor Péter igazat mond, és Tamás hazudik. Ebben nincs ellentmondás, mert az „Emese és Péter hazudik” állítás valóban hamis, hiszen Péter igazat mond.
Tehát Emese és Tamás hazudik, Péter igazat mond.

Régi érme
Semennyit, mert látható, hogy hamis, ugyanis azt, hogy Kr. e. 126 nem írhatták rá az érmére Krisztus születése előtt.

Víz a kútból
Merítsük tele a 9 litereset, majd ezzel töltsük meg a 4 litereset kétszer, és mindkétszer ürítsük is ki!
a) A maradék 1 liter vízre töltsük még a 4 liter vizet, és így pontosan 5 liter lesz a 9 literes vödörben.
b) A maradék 1 liter vizet is töltsük a 4 literesbe! Ezután újra töltsük tele a 9 litereset, és töltsünk a 4 literesbe amennyit csak lehet, ez 4 – 1 = 3 liter, tehát épp 6 liter maradt a 9 literesben.

A farkas, a kecske és a káposzta
A kecskével kell kezdeni. A pásztor átviszi a kecskét, azután visszatér, fogja a farkast, átviszi a túlpartra, otthagyja, majd visszahozza a kecskét az innenső partra. Itt hagyja a kecskét, és átviszi a farkashoz a káposztát. Végül visszatér a kecskéért, és őt is átviszi a túlpartra.

Korongok – A bal oldali érmét tegyük rá a középső érmére.

Csupa csupor
Összesen 21 csupor és 10,5 csupornyi méz van, azaz egy embernek 3,5 csupornyi méz jár. Lehet például 3t+1f+3ü, 3t+1f+3ü, 1t+5f+1ü

Mi a címem? – A 134-es számú házban lakom.

Hány évesek? – A nagymama 72, az anya 48 és a lány 16 éves.

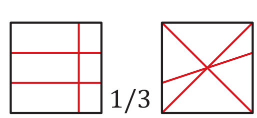
Cukorka – A 4, 2 és a 0 és 14 számpár a megoldás.

Ebéd – 4 barát, 3 szék.

Tuaregek és a kincs – Tevét cseréltek, ezért mindegyik hajszolta a másikét.

Osztozkodás
A vándor hozzácsapta saját tevéjét az örökölt 17 tevéhez. Így 18 teve felét, azaz 9-et kap a legidősebb fiú, 6-ot a középső és 2-t a legkisebb ez 9 + 6 + 2 = 17 teve, és a vándor a sajátján eltevegelhet.

Logisztori
1. Sokféle megoldás lehetséges, például:



1/3
1/4

2. Két csészébe beleteszünk 3-3 szem kockacukrot, és az egyik csészét beletesszük az üresbe.
3. A lovas lovainak neve Péntek és Szombat.

II. Mérés, geometria

A tervezett út második megállója körül keringtek. Az égbolton a csillagok szokatlan alakzatokba álltak össze, némelyiknek tegnap már nevet is adtak. Attila és Zsombi a panorámaablak előtt vitatkozott. Panni érdeklődve kapcsolódott be, mivel a két fiú beszélgetése legtöbbször valamilyen érdekes tudományos felvetés körül forogott, Zsombort egyébként is különösen kedvelte.

– Mi a gond? – mosolygott Panni várakozóan.

– Látod az ablakon a tükröződést? – kérdezte Attila.

– Persze, idebent világos van, odakint sötét, az üveg tükörként működik – bólintott Panni.

– És nem látsz semmi furcsaságot? – firtatta Zsombi, még mindig az üveget bámulva.

Panni megvonta a vállát. – Itt vagy te, Atis meg én… minek kéne furcsának lennie?

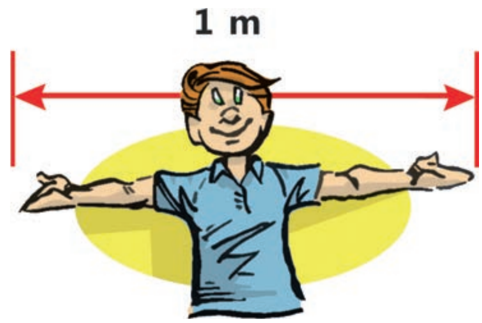
– A tükröződésnél mindig oldalt cserélünk. Én itt vagyok, te ott tükröződsz, ahol Atis áll, én meg a másik oldalon. Mintha itt nem lennének érvényesek a szabályok.

– Lehetséges – bólintott Panni – mivel ez a Geometria bolygó, lehet, hogy körülöttünk kavarognak a szabályok, és csak azután kerül minden a helyére, ha leszálltunk. Vagy akkor sem.

– Talán jobb lenne, ha nem néznénk a tükröződést – aggodalmaskodott Zsombor –, a végén nem fogjuk tudni, hogy valójában a tükör melyik oldalán állunk.

1. HOSSZÚSÁG, TÖMEG, IDŐ

A méréseknek nagyon fontos szerepe van az életünkben, ezt az előző években is láttuk. Utazáskor fontos adat, hogy milyen messzire szeretnénk eljutni, sütésnél-főzésnél megmérjük az alapanyagok tömegét, egy futóversenyen pedig nélkülözhetetlen az idő mérése. Ezért felelevenítjük, hogy mit tanultunk a mérésekkel kapcsolatban.



Méréskor a mérendő mennyiséget összehasonlítjuk a választott egységgel. A **mennyiség** **mérőszám**ból és **mértékegység**ből áll. Például: 5 dm, 7 dkg, 10 h, 8 cm^2, 1,3 mm^3, 3 dl, 45°.

A mértékegységek többszöröseit **előtag**gal fejezzük ki.

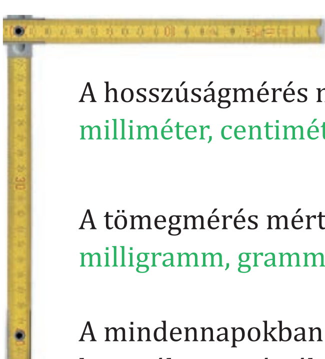
kilo	1000	k
mega	1 000 000	M
giga	1 000 000 000	G
tera	1 000 000 000 000	T

Például a kilogramm a gramm ezerszeresét, a megatonna a tonna milliószorosát jelenti.

A **gramm tízszeres**ét a **deka-** előtaggal (dekagramm, dkg), a **liter századszorosát** a **hekto-** előtaggal (hektoliter, hl) fejezzük ki.

A mértékegységek törtrészét is **előtag**gal fejezzük ki.
A **liter** és a **méter tizedé**t a **deci-** előtaggal, a **méter** és a **liter századá**t a **centi-** előtaggal fejezzük ki.
Nem kapcsolunk előtagot a fok, az év, a hónap, a hét, a nap, az óra, a perc mértékegységekhez.

milli	0,001	m
mikro	0,000 001	μ
nano	0,000 000 001	n
piko	0,000 000 000 001	p



A hosszúságmérés mértékegységei:
milliméter, centiméter, deciméter, méter, kilométer.

1 mm < 1 cm < 1 dm < 1 m < 1 km

· 10 · 10 · 10 · 1000

A tömegmérés mértékegységei:
milligramm, gramm, dekagramm, kilogramm, tonna.

1 mg < 1 g < 1 dkg < 1 kg < 1 t

· 1000 · 10 · 100 · 1000

A mindennapokban a mázsa (q) is használatos mértékegység: 100 kg = 1 q.

Az idő mérésének mértékegységei:
másodperc, perc, óra, nap, hét, hónap, év.

1 s 1 min 1 h 1 nap 1 hét 1 hónap 1 év

· 60 · 60 · 24 · 7

A hónapok különböző hosszúságúak.
28 (szökőévekben 29) napos hónap: február.
30 napos hónapok: április, június, szeptember és november.
31 napos hónapok: január, március, május, július, augusztus, október, december.
Egy év 365 nap (illetve 366 nap) hosszúságú.

Megkülönböztetünk **időpont**ot és **időtartam**ot.
Az óra mutatja az időpontot. Az időtartam pedig a két időpont között eltelt idő.

Feladatok

1. Keresd az egyenlőket!

a) 0,18 km	180 cm	180 m	1800 mm;
b) 2,4 t	240 kg	24 000 dkg	2 400 000 g;
c) 3,6 h	3600 s	216 perc	0,216 nap.

2. Add meg méterben a következő hosszúságokat!

a) 48 000 mm;	*b)* 18 300 mm;	*c)* 700 cm;	*d)* 670 cm;
e) 650 dm;	*f)* 1200 dm;	*g)* 4 km;	*h)* 19 km;
i) 2,3 km;	*j)* 0,2 km;	*k)* 0,06 km;	*l)* 0,25 km.

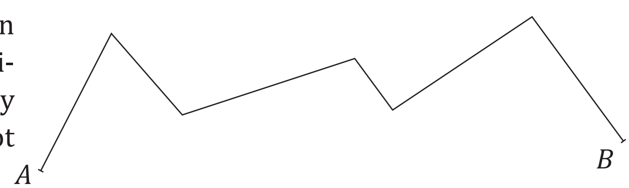
3. Add meg centiméterben a következő hosszúságokat!

a) 150 mm;	*b)* 1880 mm;	*c)* 92 dm;	*d)* 46 dm;
e) 980 m;	*f)* 6,1 m;	*g)* 0,07 km;	*h)* 1,1 km;
i) 13 mm;	*j)* 270 dm;	*k)* 4,28 m;	*l)* 0,72 km.

4. Add meg deciméterben a következő hosszúságokat!

a) 1800 mm;	*b)* 7710 mm;	*c)* 900 cm;	*d)* 860 cm;
e) 20 m;	*f)* 0,9 m;	*g)* 2 km;	*h)* 0,02 km;
i) 0,3 mm;	*j)* 1,8 cm;	*k)* 0,35 m;	*l)* 0,043 km.

5. Mérd meg, hogy milyen hosszú az ábrán látható vonal! Add meg milliméterben, centiméterben és deciméterben is a hosszát! Hány milliméterrel rövidebb ennél az *A* és *B* pontot összekötő szakasz hossza?



6. Még napjainkban is találkozhatunk az inch (hüvelyk, col) hosszúságegységgel, bár már nincs a hivatalosan elfogadott egységek között. Tudjuk, hogy 1 inch = 1 hüvelyk = 1 col ≈ 2,54 cm.

a) Egy televízió tájékoztató füzetében olvasható, hogy képernyőjének átlója 26 col. Hány centimétert jelent ez? A tietek otthon nagyobb vagy kisebb ennél?

b) A kerékpár kerékátmérőjét a használó testmagasságához kell választani. Ezzel kapcsolatban a következő táblázatot találtuk:

Testmagasság (cm)	Javasolt kerékátmérő (inch)
75–90	12
90–110	14
110–120	16
120–135	20
135–150	24
150–	26

Add meg milliméterben az egyes kategóriákhoz tartozó kerékátmérőket! Neked mekkora kerékátmérőjű bicaj ajánlott?

c) A mesebeli Hüvelyk Matyi nagyon kicsi volt. Hány centiméter magas Nagy Matyi, ha 68 hüvelyk a magassága?

7. Váltsd át grammra!

a) 15 dkg; *b)* 501 dkg; *c)* 98 kg; *d)* 7,9 kg;
e) 0,03 t; *f)* 0,002 t; *g)* 8300 mg; *h)* 200 mg.

8. Váltsd át kilogrammra!

a) 7000 g; *b)* 72 000 g; *c)* 29 500 dkg; *d)* 2200 dkg;
e) 211 000 mg; *f)* 303 300 mg; *g)* 12 t; *h)* 2,1 t.

9. A 140 grammos csokoládékat 12-esével csomagolják. Egy bolt 45 csomaggal rendelt belőle. Hány kilogramm lesz ez? (A csomagolás tömege elhanyagolható.)

10. Egy kis boltban 30 grammos csomagokban fűszerkeverék, 12 grammos csomagokban pedig zöldbors kapható. Összesen 25 csomag van a polcon.

a) Milyen határok között mozoghat a 25 csomag tömege? Add meg dekagrammban!
b) Ha ezek tömege összesen 73,2 dkg, akkor melyikből mennyi van a polcon?

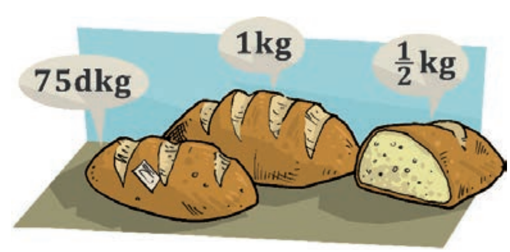
11. A következő mennyiségeket add meg másodpercben, percben és órában!

a) 5 h; *b)* 25 h; *c)* 90 perc; *d)* 130 perc;
e) 5400 s; *f)* 1800 s; *g)* 0,5 h; *h)* 0,25 h.

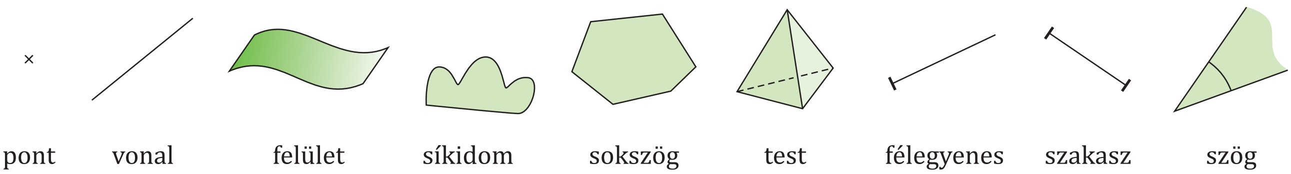
12. Edelényben felújították a kastélyt – olvashattuk, hallhattuk a híradásokban.
Szeretnénk vonattal Budapestről Edelénybe utazni. A http://www.mav-start.hu/ oldalról megtudtuk, hogy az indulási időpont 8:30, az érkezés 11:43. Hány percet töltünk vonaton, ha a menetrend szerint Miskolcon 39 percünk lesz az átszállásra?

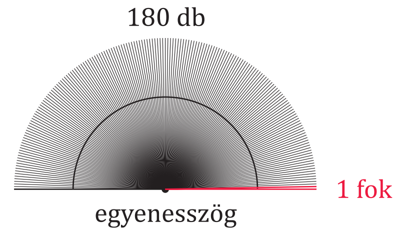
13. A pékségben fél kilogrammos, 750 grammos és 1 kilogrammos kenyereket árulnak. Az egyik boltba 20, 24 és 40 darabot rendeltek, csak elfelejtettük, hogy melyikből mennyit.

a) Minimum hány kilogramm kenyeret kell a boltba szállítanunk, hogy a rendelést a helyszínen teljesíteni tudjuk?
b) Hány kilogramm lehetett a megrendelt mennyiség?



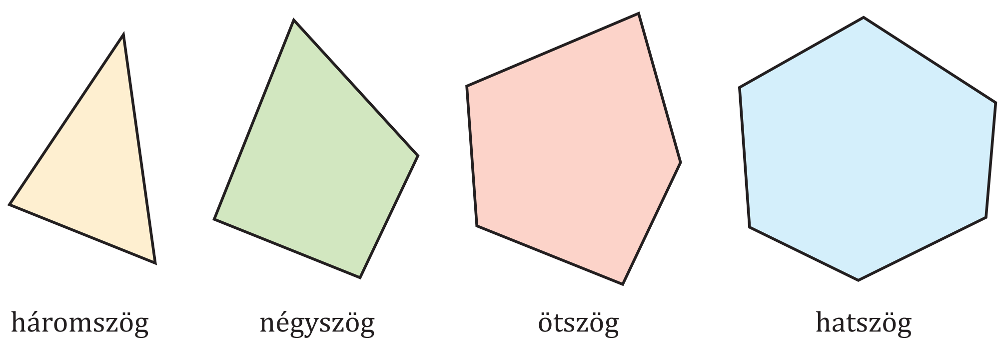
A következő szavakkal felidézzük a geometria gyakran használt fogalmait:





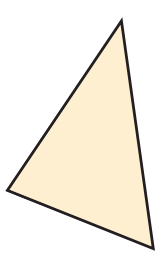
A szögmérés mértékegységének az egyenesszög 180-ad részét választották. Ez az 1° (1 fok).
Tudjuk, hogy 1° = 60’ (60 szögperc) és 1’ = 60” (60 szögmásodperc).
Nagyság szerint a következő elnevezéseket használjuk:
nullszög, hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljesszög.

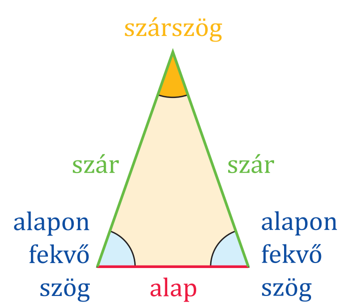
Sokszögeknek nevezzük azokat a síkidomokat, amelyeknek a határvonala csak szakaszokból áll.

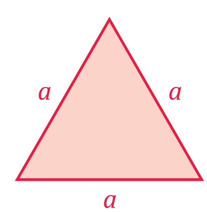


A háromszögek fajtái:

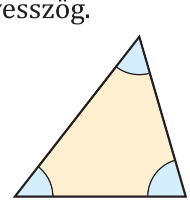
1. Az oldalak hossza szerint:
   a) **Általános háromszög:** minden oldala különböző hosszúságú.
   b) **Egyenlő szárú háromszög:** két oldala egyenlő hosszúságú.
   c) **Egyenlő oldalú (vagy szabályos) háromszög:** mindhárom oldala egyenlő hosszúságú.

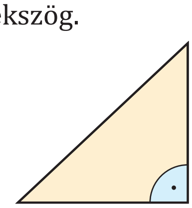


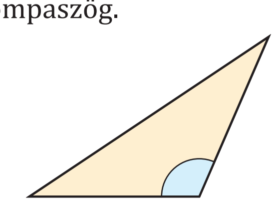




2. A szögek nagysága alapján:
   a) **Hegyesszögű háromszög:** a legnagyobb szöge (is) hegyesszög.
   b) **Derékszögű háromszög:** a legnagyobb szöge derékszög.
   c) **Tompaszögű háromszög:** a legnagyobb szöge tompaszög.

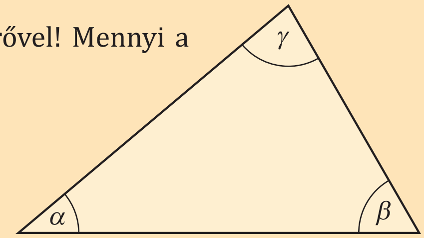






Példa

Mérjük meg az ábrán látható háromszög három szögét szögmérővel! Mennyi a három szög összege?



Megoldás

Mérésünk eredménye: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$.
A három szög összege: $\alpha + \beta + \gamma = 40° + 60° + 80° = 180°$.

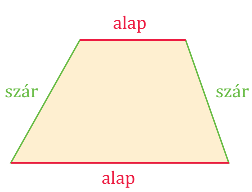
Rajzolj tetszőleges háromszögeket! Hasonlóan mérd meg a szögeit, és vedd a három szög összegét! Tapasztalható, hogy mindig 180° körüli értéket kapunk. Méréseink pontatlansága adhat egy kis eltérést, de sejtésünk a következő: **A háromszög szögeinek összege 180°.**
Sejtésünket a következő években bizonyítani is fogjuk!

A tapasztalat alapján elfogadhatjuk a következő megállapításokat:
- Az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlőek.
- Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor a velük szemközti két oldal egyenlő hosszú.

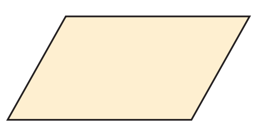
Ha az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlőek, akkor az egyenlő oldalú háromszögek mindhárom szöge egyenlő. Mivel a háromszögek szögeinek összege 180°, ezért **a szabályos háromszögek szögei 60°-osak.**

Speciális négyszögek:

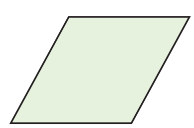
Trapéz:
van párhuzamos oldalpárja.



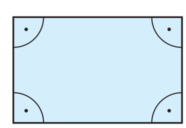
Paralelogramma:
olyan trapéz, amelynek a szárai is párhuzamosak egymással.



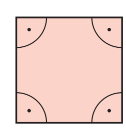
Rombusz:
olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.



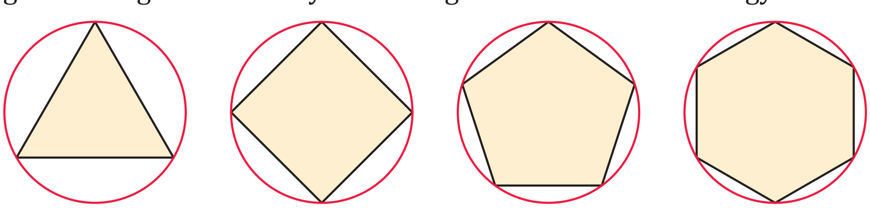
Téglalap:
olyan paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala merőleges egymásra.



Négyzet:
olyan téglalap, amelynek két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.

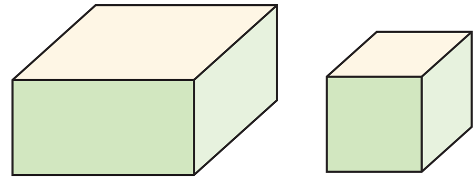


Szabályos sokszögek: olyan sokszögek, amelyeknek egyenlő hosszúak az oldalaik, és egyenlő nagyságúak a szögeik. A szabályos sokszög csúcsaira illeszthető egy kör. Azt mondjuk, hogy **a szabályos sokszögeknek van köré írt köre.**



A sokszögek köré írt körén azt értjük, hogy erre a körvonalra illeszkedik a sokszög minden csúcsa.

A testet határoló síklapokat a **test lapjai**nak nevezzük. Ezek a lapok lehetnek **háromszögek, négyszögek, ötszögek** … .
Tavaly részletesen foglalkoztunk a téglatesttel és a kockával.



Feladatok

1. Mekkora a hiányzó harmadik szög nagysága, ha $\alpha + \beta + \gamma = 180°$?

a) $\beta = 69°$, $\gamma = 82°$;
b) $\alpha = 22°\,36'$, $\gamma = 48°\,45'$;
c) $\alpha = 52°\,52'$, $\beta = 43°\,41'$;
d) $\alpha = 42°\,55'\,54''$, $\beta = 29°\,43'\,21''$.

2. Tudjuk, hogy $\alpha = 27°\,42'$ és $\alpha + \beta$ tompaszög. Milyen határok között mozoghat β?

3. A 360°-ot egyenlő hegyesszögekre vágtuk. Mekkora lehet a legnagyobb hegyesszög, amit így kaphattunk?

4. Mekkora az a szög, amelyik a megadottakat 180°-ra egészíti ki?

a) 70°;
b) 59°;
c) $28°\,42'$;
d) $54°\,13'$
e) $70°\,1'$;
f) $70°\,1'\,9''$;
g) $22°\,55'\,44''$;
h) $12°\,34'\,56''$

5. Hogyan nevezhetjük azt a háromszöget, amelyben két szög nagysága:

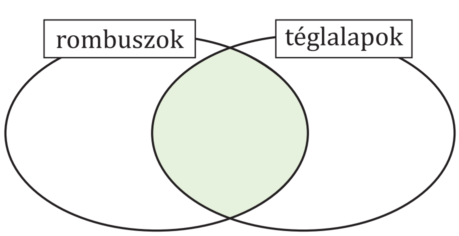
a) $\alpha = 62°$, $\beta = 28°$;
b) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$;
c) $\alpha = 52°\,51'$, $\beta = 50°\,37'$;
d) $\alpha = 42°\,13'$, $\beta = 41°\,39'$?

6. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

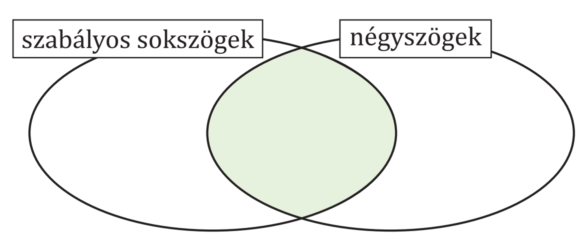
a) A trapézoknak van párhuzamos oldalpárja.
b) Minden rombusz trapéz.
c) Ha egy trapéz két szára egyenlő hosszúságú, akkor az paralelogramma.
d) A paralelogrammák olyan trapézok, amelyeknek a szárai is párhuzamosak egymással.
e) Minden négyzet rombusz.
f) Minden téglalap paralelogramma.

7. Milyen síkidomok helyezkednek el a beszínezett részben?

a)



b)



8. *a)* Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő egyik szöge 41°. Mekkorák a szögei?
b) Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 52°. Mekkorák lehetnek a hiányzó szögei?

9. Egy ötlapú testnek van szabályos háromszög és négyzet lapja is. Hogyan nézhet ki ez a test? Próbáld szemléltetni egy rajzzal! El tudsz képzelni többféle ilyen testet is?

3. EGYBEVÁGÓSÁG

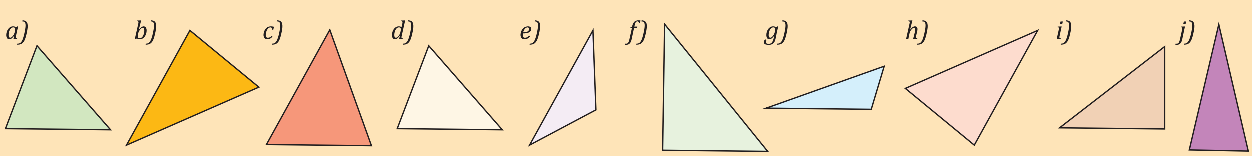
Csoportmunka

Vágjatok négy egyforma szélességű csíkra egy A4-es lapot! Egy ilyen csíkot a rövid oldalával párhuzamosan hajtsatok félbe, majd ismét és ismét. Vagyis összesen háromszor. Az így kapott kis téglalapra tervezzetek valamilyen mintát! A téglalap két hosszabb oldalának egy-egy darabja legyen határvonala a megtervezett alakzatotoknak. Vágjátok körbe a vonal mentén, majd hajtogassátok ki a papírt.
Tervezzetek többet is!

Az előzőekben leírtakat mi is elvégeztük.
Ezek az alakzatok teljesen egyformák. Egyszerre vágtuk ki őket a papírból.
Azt mondjuk róluk, hogy **egybevágók.**
Két alakzatról körbevágással és egymásra illesztéssel eldönthető, hogy egybevágók-e.
Sok esetben ránézésre döntünk. Ezzel azonban óvatosan bánj!

1. példa

Az ábrán látható háromszögek közül mely párokat látjuk egybevágóknak?



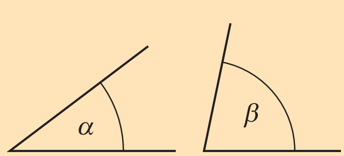
Megoldás

Az ábrán az *a)* és *d)*, valamint a *b)* és *h)* háromszögpárok látszanak egybevágónak.

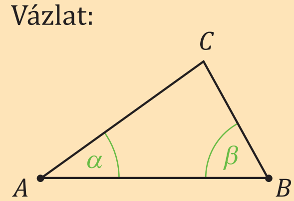
2. példa

Egy háromszögnek adott két szöge. Csak egy ilyen háromszöget tudunk szerkeszteni?

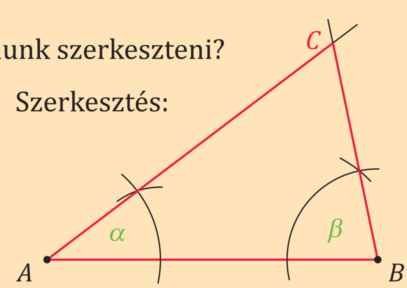
Adatok:



Vázlat:



Szerkesztés:



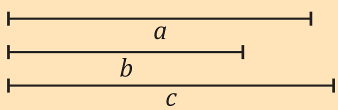
Megoldás

Az AB oldal hosszát tetszőlegesen választhatjuk meg, vagyis végtelen sok megfelelő háromszög szerkeszthető.

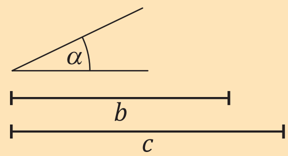
3. példa

Szerkesszünk háromszöget a következő adatokból:

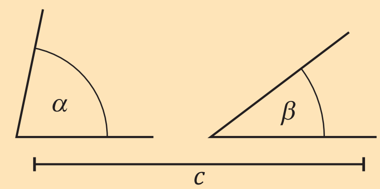
a) három oldal;



b) két oldal és a közbezárt szög;



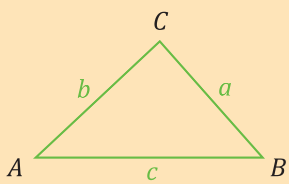
c) egy oldal és a rajta fekvő két szög!



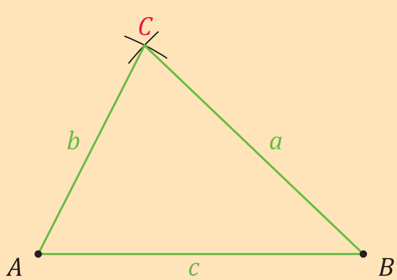
Megoldás

a)

Vázlat:

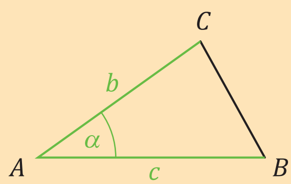


Szerkesztés:

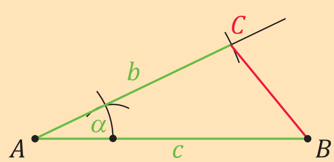


b)

Vázlat:

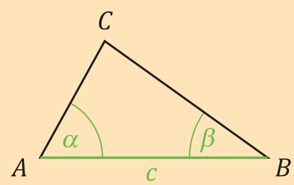


Szerkesztés:

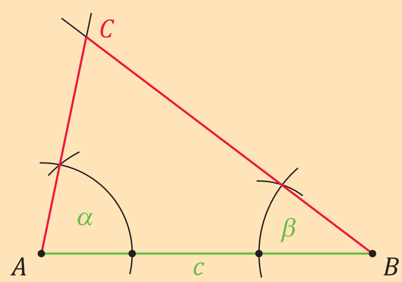


c)

Vázlat:



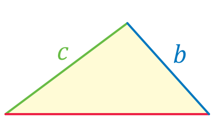
Szerkesztés:



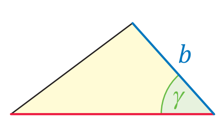
Egy háromszög megadásához három olyan adatra van szükségünk, amelyek egyértelműen meghatároznak egy háromszöget. Az oldalak és a szögek segítségével ezt többféleképpen megtehetjük.

Egy háromszöget egyértelműen meghatározza például

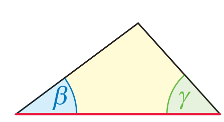
a) **három oldala;**



b) **két oldala és a közbezárt szöge;**



c) **egy oldala és a rajta fekvő két szöge.**



Ha például adott egy háromszög három oldalának a hossza, akkor ezekkel az adatokkal egyetlen háromszöget tudunk szerkeszteni. Ha egy másik háromszögnek szintén ekkorák az oldalai, akkor ez a két háromszög teljesen egyforma, egyiket a másikra tudjuk helyezni, csak helyzetükben lehet eltérés.

A fentiek alapján néhány méréssel is tudunk dönteni, hogy két háromszög egybevágó-e.

Feladatok

1. Keresd meg a hamis állítást!
a) A háromszöget egyértelműen meghatározza három oldala.
b) A háromszöget egyértelműen meghatározza három szöge.
c) A háromszöget egyértelműen meghatározza két oldala és a közbezárt szöge.
d) A háromszöget egyértelműen meghatározza egy oldala és a rajta fekvő két szöge.

2. Két egyenlő szárú háromszög alapja egyenlő hosszúságú. Melyik adatuk egyenlősége kell még, hogy egybevágóak legyenek?

3. Két derékszögű háromszög egybevágó, ha a leghosszabb oldaluk hossza egyenlő, és van azonos nagyságú hegyesszögük?

4. Rajzoltam két háromszöget. Mivel egy-egy oldaluk hossza megegyezik, ezért egybevágóak. Milyen háromszögeket rajzolhattam?

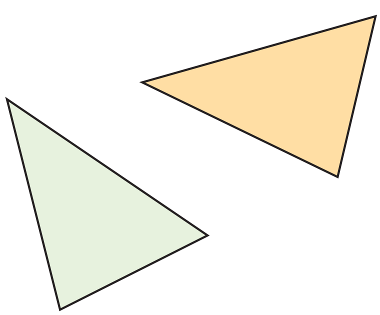
5. Határozd meg a hiányzó szögek nagyságát abban a háromszögben, amelynek van két 4 cm-es oldala, és van 30°-os szöge!

6. Egy konvex négyszög oldalainak a hossza: a = 1,5 cm, b = 3 cm, c = 4 cm és d = 4 cm. Az egyik átlója mentén két egyenlő szárú háromszögre vágható szét. Milyen hosszú lehet ez az átló?

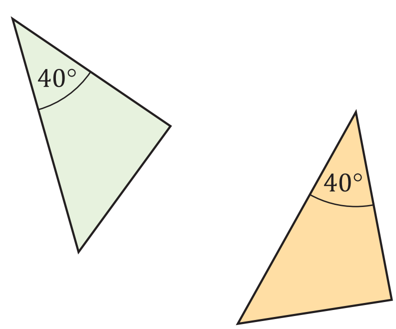
7. Szerkesztettünk egy háromszöget. Van egy 7 cm és egy 8 cm hosszúságú oldala, és van egy 60 fokos szöge. Ha te is szerkesztenél egy ilyen háromszöget, akkor a két háromszög biztosan egybevágó lenne? Válaszodat rajzzal szemléltesd!

8. Mérd meg az ábrán látható háromszögek oldalainak hosszát! Melyik pár egybevágó? Hány oldalpár hosszát kellett megmérned?

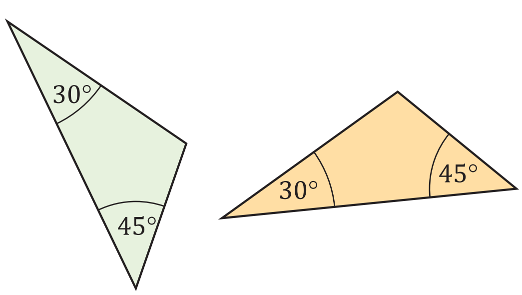
a)



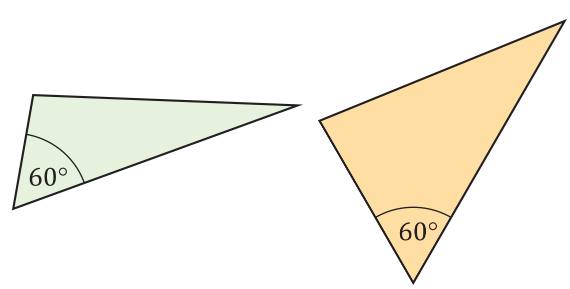
b)



c)



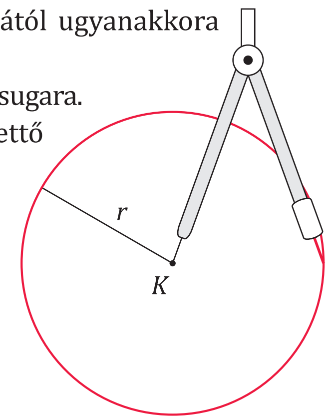
d)

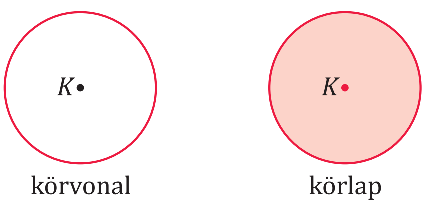


Tervezz! Alkoss!

Gyűjts olyan magyar szavakat, amelyek k-val kezdődnek, a második mássalhangzójuk r és megfelelő fantáziával kapcsolatba tudod hozni őket a körrel! Fogalmazd meg ezeket az elképzeléseidet! Az indoklásaidat rajzokkal, képekkel is szemléltetheted. A gyűjtést kiterjesztheted olyan szavakra is, amelyekben a k helyett g szerepel.

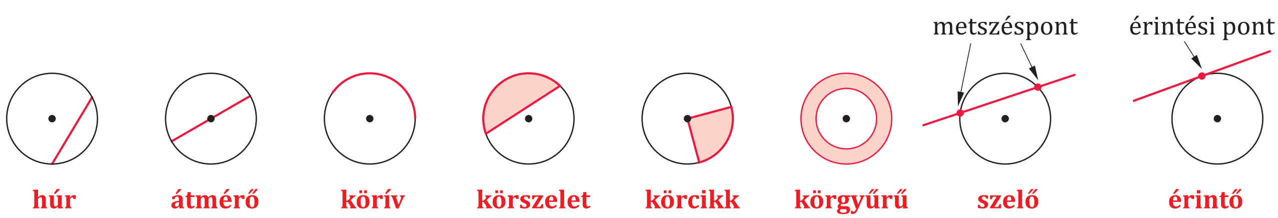
A **körvonal**at azok a síkbeli pontok alkotják, amelyek a sík egy adott pontjától ugyanakkora távolságra vannak.
Az ábrán az adott pont a *K*, ez a kör középpontja. A rögzített távolság az *r*, ez a kör sugara.
Megkülönböztettük egymástól a **körvonal**at és a **körlap**ot, de sokszor mindkettő helyett csak kört mondunk. A szövegkörnyezet fogja eldönteni, hogy melyikre gondolunk.





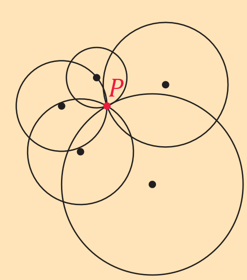
Rajzolj két különböző kört, de ugyanakkora sugárral!
Nem kell kivágnunk és egymásra illesztenünk a két kört, így is látjuk, hogy ezek egybevágóak.

A következő ábrák alapján feleleveníthted a körrel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat.



1. példa

Adott a síkon egy *P* pont. Rajzoljunk olyan köröket, amelyek ezen a ponton áthaladnak! Mit tapasztalunk? Hány ilyen kör van? Hogyan kell ilyen köröket rajzolnunk?

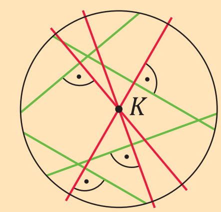


Megoldás

Tetszőlegesen sok ilyen kört tudunk rajzolni. Kiválasztunk egy *K* középpontot a síkon. Természetesen nem a *P* pontot. Ehhez megrajzolható a *K* középpontú *KP* sugarú kör.

2. példa

Rajzoljunk egy K középpontú kört! Szerkesszük meg a kör néhány húrjának a felezőmerőlegesét! Mit tapasztalunk?

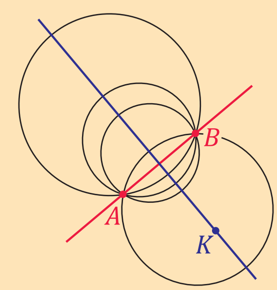


Megoldás

A felezőmerőlegeseket a tavaly tanult módon megszerkeszthetjük. Ezek mindegyike áthalad a kör középpontján.

3. példa

Adott a síkon az A és a B pont. Rajzoljunk olyan köröket, amelyek ezeken a pontokon áthaladnak! Hány ilyen kör van? Hogyan kell ezeket a köröket megrajzolnunk?



Megoldás

Most is tetszőlegesen sok megfelelő kört tudunk rajzolni. Az AB szakasz a kör húrja lesz, ezért a kör középpontja csakis az AB felezőmerőlegesén lehet. Vagyis megszerkesztjük az AB felezőmerőlegesét. Erről az egyenesről választhatjuk a kör K középpontját. A KA és KB szakasz a kör sugara lesz.

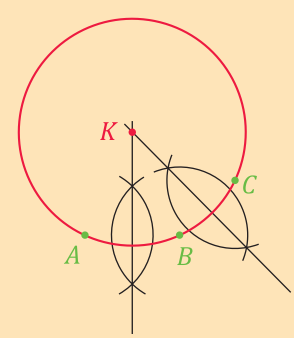
4. példa

Adott a síkon az A, B és C nem egy egyenesre illeszkedő pont. Hogyan lehet olyan kört szerkeszteni, amely mindhárom ponton átmegy? Hány ilyen kör van?

Megoldás

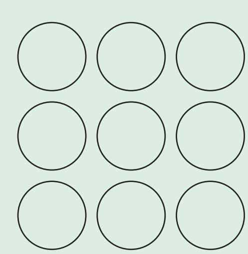
A keresett körben az AB, BC és a CA húr lesz. Tudjuk, hogy mindhárom szakasznak a felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Ezért elegendő két felezőmerőlegest megszerkesztenünk. A K metszéspontjuk lesz a kör középpontja. A KA, KB és KC a kör sugarát adja.

Ilyen kör csak egy van.



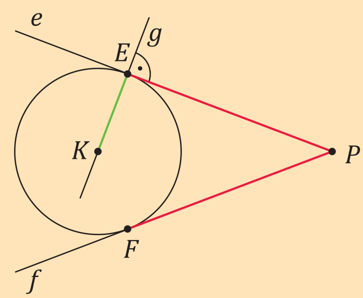
Rejtvény

Rajzold le az ábrát a füzetedbe! Rajzolj hozzá még három kört úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban négy-négy kör legyen!



5. példa

Az ábra tanulmányozásával fogalmazzunk meg igaz állításokat!



Megoldás

Az ábrán az *e* egyenes merőleges az *EK* sugárra. Rövid jelöléssel: $e \perp EK$.
A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
A *K* pont illeszkedik a *g* egyenesre. Rövid jelöléssel: $K \in g$.
Az érintési pontban az érintőre merőleges egyenesre illeszkedik a kör középpontja.
Az *E* pontra illeszkedő további egyenesek metszenék a kört.
A kör egy adott pontjában csak egy érintő rajzolható.
Az ábrán látható *PE* és *PF* szakaszok egyenlő hosszúak.
Egy körön kívüli pontból két érintő húzható a körhöz, és az ezeken lévő érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

TERVEZZ! ALKOSS!

Rajzolj körvonalak, körívek segítségével egyszerű és szép ábrákat! Olyan ábrákat tervezz és szerkessz, mintha egy cég vagy egy márka logóját kellene megalkotnod!

Feladatok

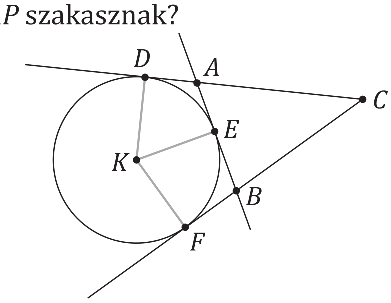
1. Rajzolj egy kört és egy egyenest! Hányféle helyzetben tudod őket lerajzolni? Nevezd el az ábráid fontos szereplőit (érintési pont, metszéspont)!

2. Rajzolj két kört! Hányféle helyzetben tudod őket lerajzolni? Az ábráidon jelöld (ha van) az érintési pontot, a metszéspontot!

3. Rajzolj a füzetedbe egy 3 cm sugarú kört! A körvonalon jelölj egy *A* pontot! Hány olyan *A* végpontú húr van a körben, amelyiknek a hossza centiméterben mérve egész szám? Készítsd el az ábrát! Színezéssel szépítheted is!

4. Rajzolj egy *K* középpontú kört és két olyan *KA* és *KB* sugarát, amelyek 30°-os szöget zárnak be egymással! Rajzold meg az *A* pontra illeszkedő érintőt is! Ez az érintő a *KB* egyenest egy *P* pontban metszi.
a) Mi a neve az *AB* egyenesnek, *AB* szakasznak, *AP* egyenesnek, *AP* szakasznak?
b) Mekkora az *APK* szög?

5. A vázlatrajz egy kör alakú medencét és a környezetét mutatja felülnézetben. Panka és Janka két egyenes útvonal *C* metszéspontjában beszélgetnek. Később Janka a *CA* és *AE* útvonalon, Panka pedig a *CB* és *BE* útvonalon elsétál a medence széléhez. Melyikük útvonala hosszabb?



5. TENGELYES TÜKRÖZÉS

Hajts ketté egy papírlapot! A körződdel szúrd át az így kapott dupla lapot! A hajtásvonalat nevezd el *t* egyenesnek! Az egyik szúrás helye legyen a *P* pont, a másik pedig legyen *P'* pont.
Vizsgáljuk az így kapott ábrát!

A *PP'* szakasznak a *t* egyenes a felezőmerőlegese. Az ábra olyan, mintha a *t* egy tükör lenne, és a *P* pont a tükörben a *P'* helyre kerülne. Csak nem térben történik ez az átalakulás, hanem síkban.
Azt mondjuk, hogy a *P* képe a *P'*.

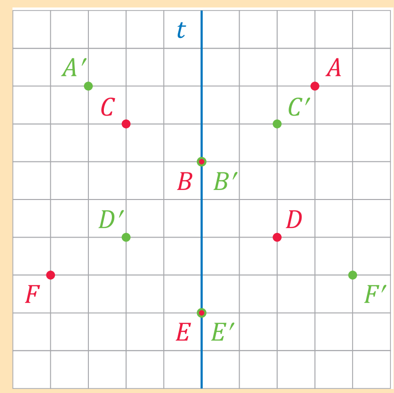
A *t* egyenest tükörtengelynek (röviden tengelynek) nevezzük.
A sík bármely pontjának megkereshetjük a képét. A tengelyen lévő pont képe önmaga lesz.

1. példa

A négyzetháló egyik egyenese legyen a tengely. Rajzoljunk a tengely mindkét oldalára és a tengelyre is néhány pontot! Rajzoljuk meg a pontok tükörképét!

Megoldás

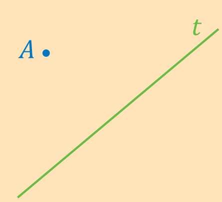
Az *A, B, C, D, E, F* pontok tükörképei ugyanebben a sorrendben: *A', B', C', D', E', F'*.



Ha nem négyzethálón dolgozunk, vagy nem akarjuk körzővel átszúrni a lapunkat, akkor is szeretnénk meghatározni a tükörképeket. Hogyan lehet egy pont tükörképét megszerkeszteni?
A szerkesztéshez használhatjuk a megállapításunkat, vagyis a pont és a képe által meghatározott szakasznak a tengely a felezőmerőlegese.

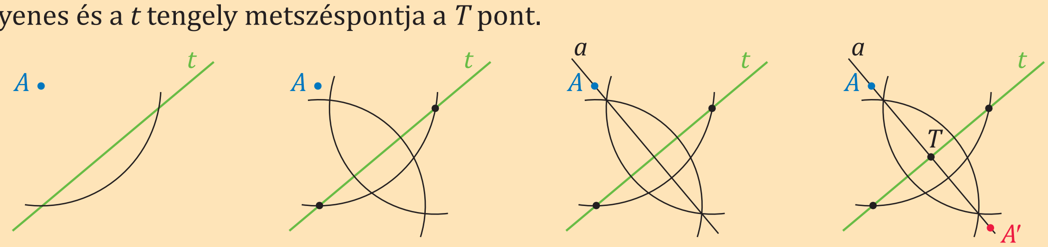
2. példa

Szerkesszük meg a *t* tengelyre az *A* pont tengelyes tükörképét!



Megoldás

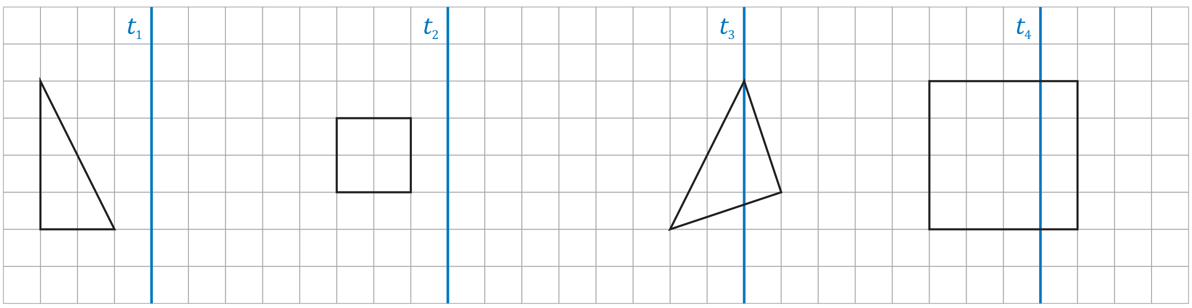
Az *A* pontból merőlegest állítunk a *t* tengelyre, ez az *a* egyenes.
Az *a* egyenes és a *t* tengely metszéspontja a *T* pont.



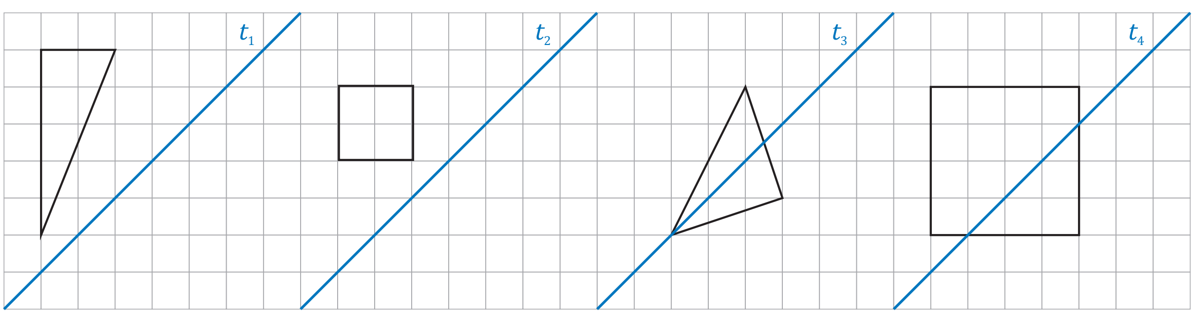
A *TA* távolságot a körzőnkkel felmérjük az *a* egyenesen a *t* másik oldalán is. Így megkapjuk az *A'* tükörképet. Hogyan tudnád a szerkesztés lépéseinek számát csökkenteni?

Feladatok

1. Másold át a füzetedbe az ábrákat! Rajzold meg szabadkézzel, a négyzetrács segítségével a síkidomok csúcsainak tükörképeit! A tükörképként kapott pontokat kösd össze a megfelelő sorrendben!



2. Másold át a füzetedbe az ábrákat! Rajzold meg szabadkézzel, a négyzetrács segítségével a síkidomok csúcsainak tükörképeit! A tükörképként kapott pontokat kösd össze a megfelelő sorrendben!



3. Rajzolj egy háromszöget! Vegyél fel egy tengelyt az egyik csúcsán át! A tengely ne vágjon bele a háromszögbe! Szerkeszd meg a háromszög három csúcsának tükörképét! A tükörképeket kösd össze!

4. Rajzolj a füzetedbe egy *A*, *B* és egy *A'* pontot.
a) Szerkeszd meg a tengelyt, ha tudod, hogy az *A* pont képe az *A'*!
b) Szerkeszd meg a *B* pont képét!

5. Adott a *t* egyenes és a rá nem illeszkedő *B'* pont. Szerkeszd meg a *B* pontot, ha tudod, hogy a *t* tengelyre vett tükörképe a *B'*!

6. Rajzolj egy négyzetet! Vegyél fel egy tengelyt az egyik csúcsán át! A tengely ne vágjon bele a négyzetbe! Szerkeszd meg a négyzet négy csúcsának tükörképét! A tükörképeket kösd össze!

7. Szerkessz egy négyzetet és minden oldalra kifelé egy-egy szabályos háromszöget! Az így kapott nyolc pontot nevezd el! Sorold fel azokat a pontpárokat, amelyekre úgy tudnál tengelyt rajzolni, hogy a megnevezett nyolc pont mindegyikének a tükörképe is szerepel az ábrán!

6. A TENGELYES TÜKRÖZÉS TULAJDONSÁGAI

A tengelyes tükrözés végrehajtásakor láttuk, hogy a sík minden pontja ugyanolyan távolságra van a tengelytől, mint a képe. A tengelyen lévő pontok helyben – idegen szóval fixen – maradnak. Vagyis a pont és a képe is nulla távolságra van a tengelytől. Láttuk, hogy minden pontnak pontosan egy képe van, és minden képhez egyértelműen meghatározhatjuk az eredeti pontot.

Korábban már tükröztük a háromszög csúcsait, aztán a képként kapott pontokat összekötöttük. A háromszög oldalegyenesére illeszkedő további pontokat nem tükröztük. Azt feltételeztük, hogy az egyenes a tükrözés után is egyenes lesz.

A tengelyes tükrözés egyenestartó, mert az egyenes képe egyenes.

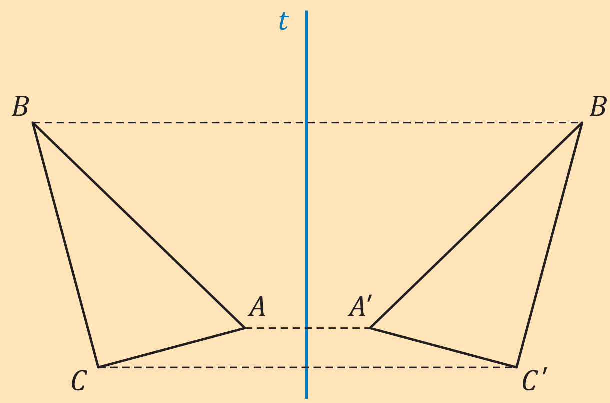
Ezt a tulajdonságot használva elegendő egy sokszög csúcsait tükröznünk. A képként kapott pontok összekötésével megkapjuk a sokszög tükörképét.

1. példa

Tükrözzünk egy háromszöget egy egyenesre! Mérjük meg és hasonlítsuk össze a két háromszög

a) oldalainak hosszát;

b) szögeinek nagyságát!



Megoldás

a) Az ABC háromszög oldalainak a hossza:
AB = 3,5 cm, BC = 3 cm, AC = 1,8 cm.
Az $A'B'C'$ háromszög oldalainak a hossza:
$A'B'$ = 3,5 cm, $B'C'$ = 3 cm, $A'C'$ = 1,8 cm.
Méréseink azt mutatják, hogy a háromszög oldalainak hossza nem változott a tükrözés során.

b) Az ABC háromszög szögeinek nagysága: $ABC\sphericalangle = 30°$, $BCA\sphericalangle = 90°$, $CAB\sphericalangle = 60°$.
Az $A'B'C'$ háromszög szögeinek nagysága: $A'B'C'\sphericalangle = 30°$, $B'C'A'\sphericalangle = 90°$, $C'A'B'\sphericalangle = 60°$.
Méréseink azt mutatják, hogy a háromszög szögeinek nagysága sem változott a tükrözés során.

A tengelyes tükrözés a szakaszok hosszát és a szögek nagyságát nem változtatja meg.

A tengelyes tükrözés távolságtartó és szögtartó.

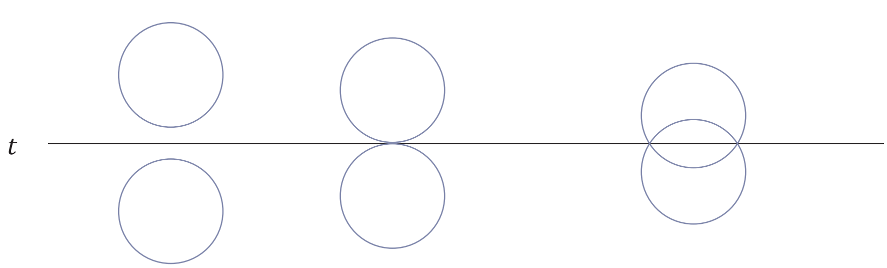
Az ilyen tulajdonságú átalakulásokat (szakszóval: transzformációkat) egybevágósági transzformációknak nevezzük. A transzformáció idegen szó, jelentése átalakítás, átváltoztatás.

Az egybevágóság jele: $\cong$.

A tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció.

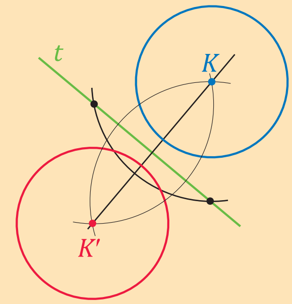
A példában látott egybevágóságot röviden így írjuk:
$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$ (az ABC háromszög egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel).

A kör tengelyes tükörképe is kör, azaz **a tengelyes tükrözés körtartó.**



2. példa

Tükrözzünk egy kört egy adott tengelyre!

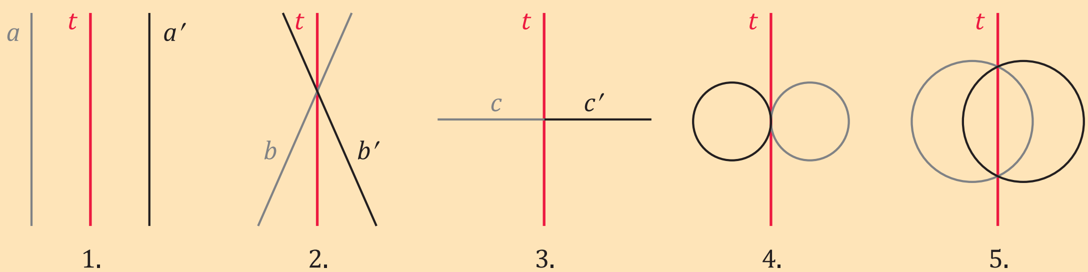


Megoldás

Mivel a tengelyes tükrözés körtartó és távolságtartó, ezért elegendő a kör középpontját tükröznünk. Az így kapott középpont körül az eredeti sugárral megrajzoljuk a képet.

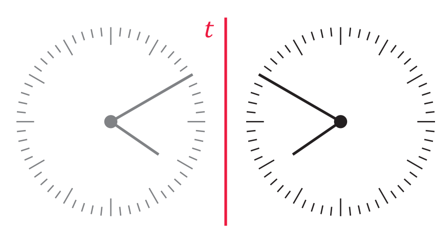
3. példa

Az ábrák alapján fogalmazzunk meg további tulajdonságokat a tengelyes tükrözésről!



Megoldás

1. A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel. Mindkét egyenes ugyanolyan távolságra van a tengelytől.
2. A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást. A két egyenes szögét a tengely felezi.
3. A tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.
4. Ha egy kör érinti a tengelyt, akkor a képe ugyanott érinti a tengelyt.
5. Ha egy kör metszi a tengelyt, akkor a képe ugyanott metszi a tengelyt.



Tükröztük az óra számlapját.
A tükörképen a mutatók az eredetihez képest ellentétes irányba haladnának.

A tengelyes tükrözés megváltoztatja a forgási (körüljárási) irányt.

Az óramutató járásával ellenkező forgási irányt pozitívnak, az óramutató járásával egyezőt negatívnak szoktuk nevezni.

Például fodrászatokban szoktak a székek háta mögött ilyen órát elhelyezni. Vajon miért?

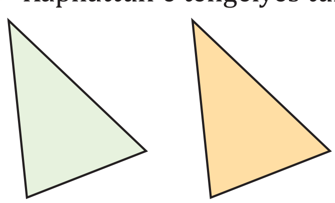
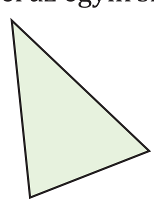
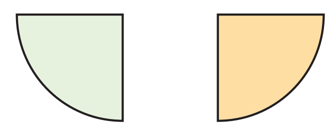
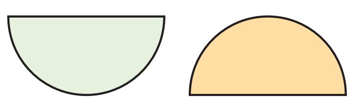
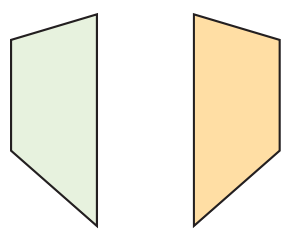
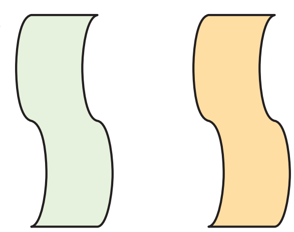
Feladatok

1. Rajzolj egy téglalapot és tükrözd
a) a rövidebb oldalegyenesére; *b)* a hosszabb oldalegyenesére;
c) az átló egyenesére; *d)* egy tetszőleges, a középpontjára illeszkedő egyenesre!

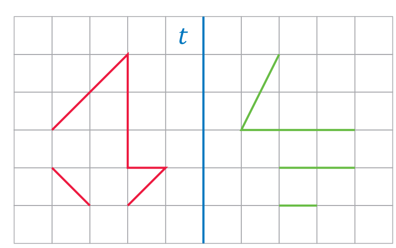
2. Szerkeszd meg a tükörképét
a) egy félkörnek; *b)* egy negyed körnek!

3. Szerkeszd meg egy négyzet tükörképét, ha a tengely illeszkedik
a) két szomszédos oldal; *b)* két szemközti oldal
felezőpontjára!

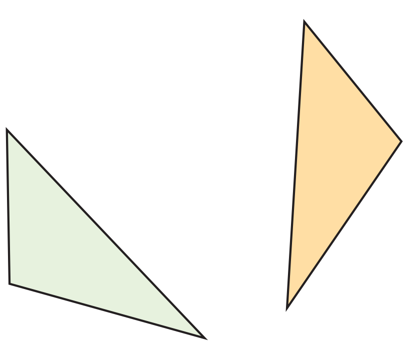
4. Kaphattuk-e tengelyes tükrözéssel az egyik síkidomból a másikat?

a)

b)

c)

d)

e)

f)


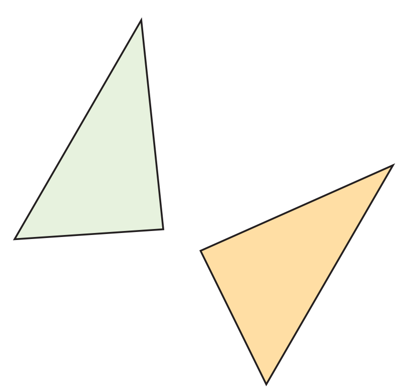
5. A négyzethálón egy alakzat részletét látod. A hiányzó résznek megadtuk a tengelyes tükörképét. Másold át a füzetedbe, és rajzold meg a teljes ábrát!



6. Az ábrán látható két háromszög egymás tükörképe. Hogyan tudnád megszerkeszteni a tengelyt, ha csak vonalzód van?



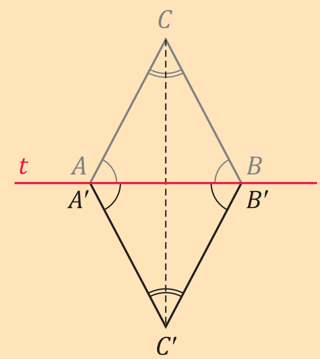
7. Az ábrán látható két háromszög egymás tükörképe. Hogyan tudnád megszerkeszteni a tengely két pontját, ha csak körződ van?



Mi van ráírva? Nézzétek meg a képet egy tükörben! Beszéljétek meg, hogy miért így feliratozták az autót. Hol láthatunk még ilyet?

1. példa

Tükrözzünk egy egyenlő szárú háromszöget az alap egyenesére! Gyűjtsük össze a két háromszög egyesítésével kapott négyszög tulajdonságait!

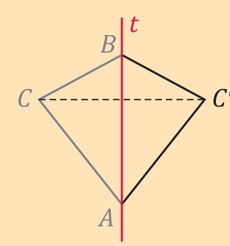


Megoldás

A háromszög egyenlő szárú: $AC = BC$.
A tengelyes tükrözés távolságtartó: $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.
Vagyis a kapott négyszög minden oldala egyenlő hosszúságú.
Rombuszt kaptunk.
A háromszög egyenlőszárúságából következik, hogy az alapon fekvő szögek egyenlők. Tudjuk, hogy a tengelyes tükrözés szögtartó. Ezek alapján: a rombusz két-két szemközti szöge egyenlő. A tengelyes tükrözés miatt a CC' merőleges az AB egyenesre. Vagyis a rombusz átlói merőlegesek egymásra. A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit.

2. példa

Tükrözzünk egy hegyesszögű háromszöget a leghosszabb oldalára illeszkedő egyenesre! Figyeljük meg az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével kapott négyszöget! Gyűjtsük össze ennek a négyszögnek a tulajdonságait!

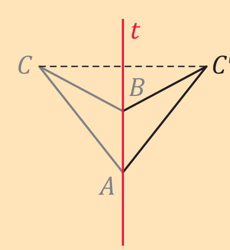


Megoldás

A kapott négyszöget deltoidnak nevezzük.
Két-két oldalának hossza egyenlő. Az átlói merőlegesek egymásra. Két szemközti szögének nagysága egyenlő.

3. példa

Tükrözzünk egy tompaszögű háromszöget a legrövidebb oldalára illeszkedő egyenesre! Figyeljük meg az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével kapott négyszöget!



Megoldás

Az ábra mutatja a négyszöget. Az előző példában elmondottak erre a négyszögre is érvényesek.

7. A TENGELYES TÜKRÖZÉS ALKALMAZÁSAI

Az előző két példában kapott négyszögek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú. Az ilyen négyszögek neve: **deltoid**.
A 2. példában konvex deltoidot, a 3. példában konkáv deltoidot kaptunk. Az 1. példában is szereplő rombusz olyan deltoid, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.

Kutatómunka

Vannak olyan szavak, amelyekben a betűk tükrösen helyezkednek el.
Nem geometriai tükrözésről van szó, csak a tükörképnél ugyanazt a betűt írjuk: Anna, apa, ...

Készíthetünk ilyen tulajdonságú mondatokat is: Géza, kék az ég!
Ezek a palindrom szavak, palindrom mondatok.

Készíts, gyűjts ilyeneket!

Feladatok

1. A következő állítások közül melyek igazak a deltoidra, és melyek a rombuszra?

a) Van két egyenlő szöge.
b) Van két egyenlő oldala.
c) Van négy egyenlő oldala.
d) Mindkét átlója szögfelező.
e) Átlói merőlegesek egymásra.
f) Átlói felezik egymást.
g) Szemközti szögei egyenlőek.
h) Az egyik átlója felezi a másikat.

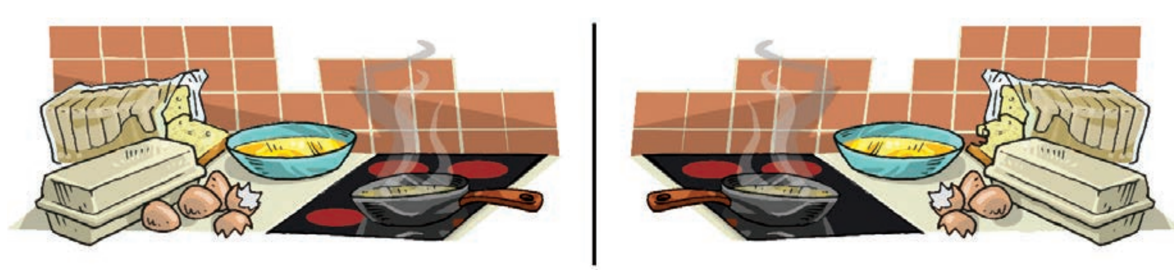
2. Rajzolj egy paralelogrammát! Tükrözd az egyik oldalegyenesére!

3. A következő alakzatok közül melyek azok, amelyeken nem lehet észrevenni, ha tükrözzük őket egy függőleges tengelyre?

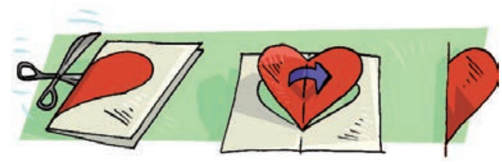
4. Add meg azokat a nyomtatott nagybetűket, amelyek a tükörben nem változnak meg!

5. Add meg azokat a számjegyeket, amelyek a tükörben nem változnak meg!

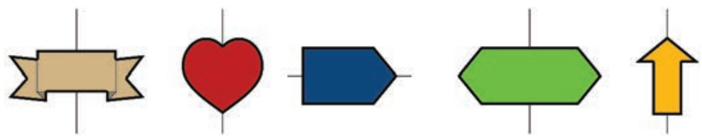
6. A két kép tengelyes tükörképe egymásnak. A rajzoló sajnos öt hibát vétett rajzolás közben. Keresd meg a két ábra közötti különbséget!



Egy írólapot hajts pontosan ketté, majd a hajtásvonalnál vágj ki egy alakzatot! Ezután nyisd ki a papírlapot, és nézd meg a kivágott részt és a papírlapon keletkezett lyukat is.



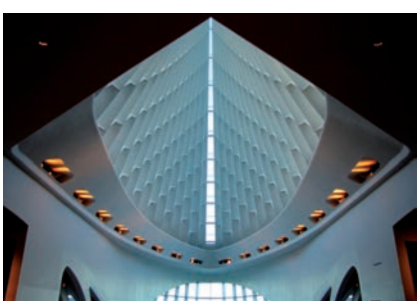
Figyeld meg! A hajtásvonal mentén a papír és a kivágott alakzat is úgy hajtható félbe, hogy a két rész tökéletesen fedi egymást.
Rajzolj még ilyen alakzatokat az írólapodra! Kivágás után félbehajtva ellenőrizheted, hogy jót rajzoltál-e.
A következő ábrán is ilyen félbehajtható alakzatokat látunk, és bejelöltünk egy-egy jó hajtásvonalat is.



Van-e az ábrán látható alakzatok között olyan, amelyiket nem csak egy vonal mentén tudnál félbehajtani?

A negyedik alakzatra be tudtunk rajzolni egy másik lehetséges hajtásvonalat is. Ezek a hajtásvonalak mindegyik esetben egy tengelyes tükrözés tengelyei lesznek. Ha végrehajtanánk a tengelyes tükrözést, akkor ezek az alakzatok nem változnának.

Ha egy alakzathoz található olyan tengelyes tükrözés, amely önmagába viszi, akkor az alakzatot **tengelyesen tükrös**nek vagy **tengelyesen szimmetrikus**nak mondjuk.
Az ábráinkon látható hajtásvonalak a tükörtengelyek.
Láttuk, hogy egy alakzatnak több tengelye is lehet.
Az ember által készített, épített környezetben nagyon sok tengelyes szimmetriát láthatunk, de a természetben is megfigyelhetjük a szimmetriát.






A környezetünkben található szimmetrikus tárgyak, élőlények valójában síkra tükrösek. Mi most csak síkban, tengelyre nézve vizsgáltuk a szimmetriát. Ezért a mellékelt fényképeket nem térbeli alakzatként, hanem képként kell szemlélnünk.

8. TENGELYES SZIMMETRIA

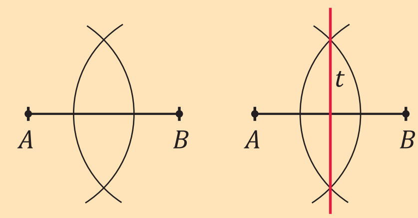
A szimmetria arányosságot, kiegyensúlyozottságot sugároz. Megfigyelhető, hogy a szépség kapcsolatban állhat a szimmetriával.
Térben a testek is lehetnek szimmetrikusak. A síkbeli alakzatoknak tükörtengelyük, a testeknek tükörsíkjuk lehet. Nagyon sok szimmetrikus élőlényt, épületet, tárgyat találhatunk a környezetünkben.

1. példa

Szerkesszük meg egy adott szakasz szimmetriatengelyét!

Megoldás

Tudjuk, hogy a tengelyes tükrözésnél a sík minden P pontja és annak P' képe által meghatározott szakasznak a tengely a szakaszfelező merőlegese. Így az adott szakasz **szakaszfelező merőleges**ét kell megszerkesztenünk. Az itt látható két ábrával felelevenítjük ezt a szerkesztést. Az AB szakasz szimmetriatengelye a t egyenes.



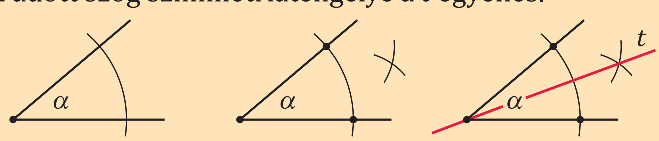
Mivel a szakaszfelező merőleges a szakasz szimmetriatengelye, ezért minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.

2. példa

Szerkesszük meg egy adott szög szimmetriatengelyét!

Megoldás

Már tudjuk, hogy a tengelyt metsző egyenes és képe által meghatározott szögnek a tengely a szögfelezője. Ezért az adott szög **szögfelező egyenes**ét kell megszerkesztenünk. Az ábrasorozat mutatja a szerkesztés lépéseit. Az adott szög szimmetriatengelye a t egyenes.

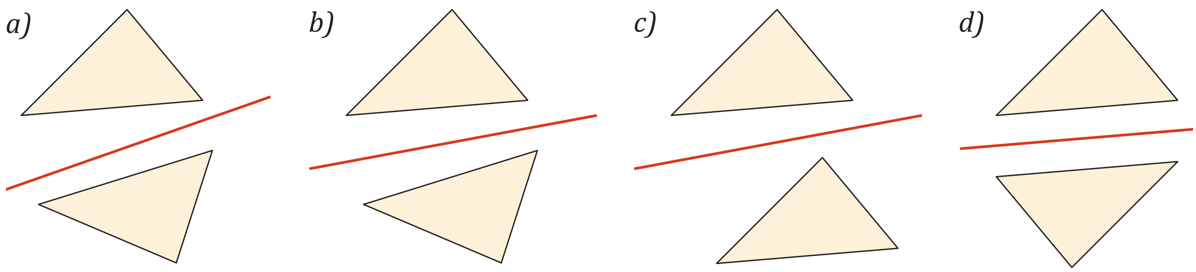


Mivel a szögfelező a szög szimmetriatengelye, ezért minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától. A szimmetriatengelynek a szögtartományba eső félegyenese két egyenlő szögtartományra vágja szét az eredeti szöget.

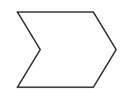
A tengelyes szimmetria szerepe és jelentősége messze túlmutat a geometrián. Az élő és az élettelen, a természet és az ember által alkotott forma egyaránt hordozhatja a szimmetriát.
A tengelyes szimmetriának a művészetekben is nagy a szerepe.

Feladatok

1. Az ábrákon két háromszög és egy egyenes látható. Melyik ábráról mondhatjuk, hogy az egyik háromszöget az egyenesre tükrözve a másik háromszöget kapjuk?



2. Rajzold le a füzetedbe a következő alakzatot, majd tengelyes tükrözések egymásutánjával készíts sormintát!

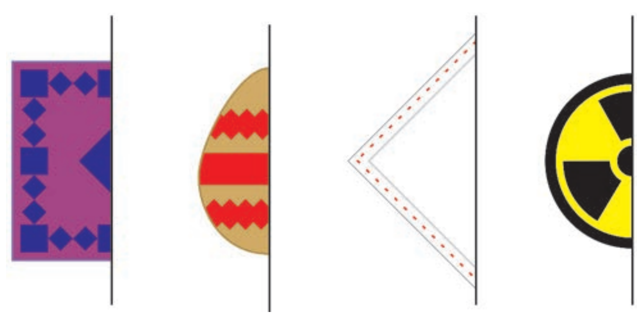


a) Melyek azok az ábrák, amelyek ugyanúgy állnak, mint az első?
b) Melyek azok az ábrák, amelyek tükörképei az elsőnek? Hová kell tenni a tengelyt?

3. *a)* Melyek azok a digitális számjegyek, amelyeket úgy tudsz lerajzolni, hogy legyen szimmetriatengelyük?
b) Készíts olyan többjegyű számot ezekkel a számjegyekkel, amelynek van szimmetriatengelye!

4. *a)* Melyek azok a nyomtatott nagybetűk, amelyeket úgy tudsz lerajzolni, hogy legyen szimmetriatengelyük?
b) Írj nyomtatott nagybetűkkel olyan szavakat, amelyeknek van szimmetriatengelyük!

5. Az emberek ősidők óta használják a tükrözést. Megfigyelhetjük ékszerek, edények, bútorok készítésénél, díszítésénél. Átlátszó papír segítségével készítsd el a füzetedben az ábrák másik felét is, hogy tengelyesen tükrösek legyenek!



6. *a)* Készíts négyzetek és egy téglalap felhasználásával szimmetrikus ábrát!
b) Készíts körvonalak segítségével szimmetrikus ábrát!

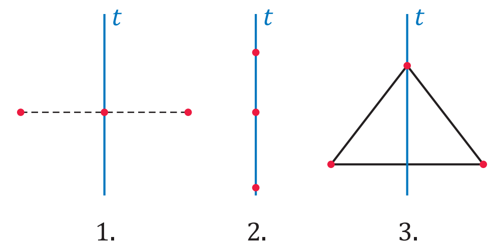
7. Rajzolj olyan közlekedési táblákat, amelyek tengelyesen szimmetrikusak!

8. Egy egyenes út mellett a mezőn két fa látható. Készíts egy térképvázlatot! Hogyan lehetne az útnak azt a pontját megtalálni a vázlatodon, amelytől mindkét fa egyenlő távolságra van?

9. Rajzolj két párhuzamos egyenest! Rajzold meg pirossal az ábra szimmetriatengelyét!

9. TENGELYESEN SZIMMETRIKUS HÁROMSZÖGEK

A háromszögeket már csoportosítottuk a szögeik és az oldalaik alapján. Most szimmetriájuk alapján fogjuk vizsgálni őket.
Három pont szimmetrikus helyzetei:



Ha a három pont nincs egy egyenesen és szimmetrikus helyzetű, akkor ezeket összekötve **tengelyesen szimmetrikus háromszöget**, vagyis **tengelyesen tükrös háromszöget** kapunk.

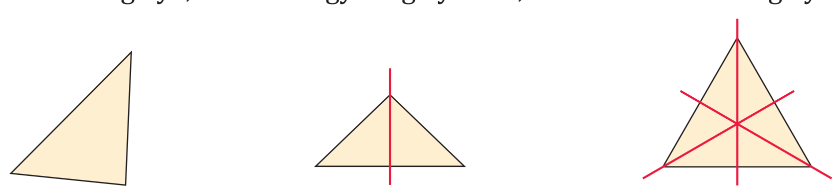
Az eddigi ismereteink alapján: *a)* Ha egy háromszög szimmetrikus, akkor van két egyenlő hosszú oldala (azaz egyenlő szárú). *b)* Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor szimmetrikus.

Kiemeljük a mondatok lényegét: szimmetrikus $\Rightarrow$ egyenlő szárú; egyenlő szárú $\Rightarrow$ szimmetrikus,
azaz: szimmetrikus $\Leftrightarrow$ egyenlő szárú

A kettős nyilat az **akkor és csak akkor** szófordulattal tudjuk megfogalmazni:

Egy háromszög akkor és csak akkor szimmetrikus, ha egyenlő szárú.

Az egyenlő oldalú háromszögeknek három szimmetriatengelye van.
A háromszögeket csoportosíthatjuk a szimmetriatengelyek száma szerint:
- nincs tengelye;
- egy tengelye van;
- három tengelye van.



1. példa

Fogalmazzuk meg egy mondattal a következő két igaz állítást:
Ha egy háromszög szimmetrikus, akkor két szöge egyenlő.
Ha egy háromszögnek két szöge egyenlő, akkor szimmetrikus.

Megoldás

Egy háromszög akkor és csak akkor szimmetrikus, ha két szöge egyenlő.

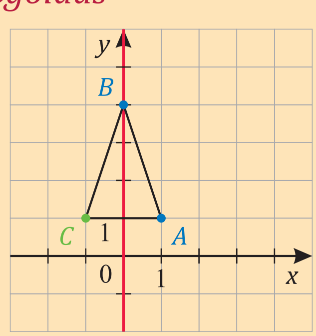
2. példa

Szimmetrikus háromszöget szeretnénk rajzolni a koordináta-rendszerben. A háromszög két csúcsa: $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 4)$. Adjuk meg a C csúcs koordinátáit, ha a háromszög szimmetriatengelye az

a) y tengely; *b)* y tengellyel párhuzamos egyenes;
c) x tengellyel párhuzamos egyenes; *d)* első negyed szögfelezője!

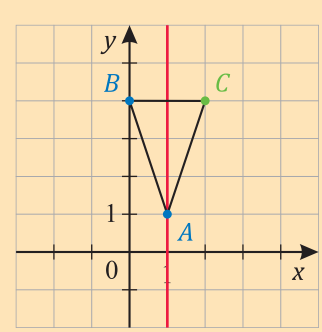
Megoldás

a)



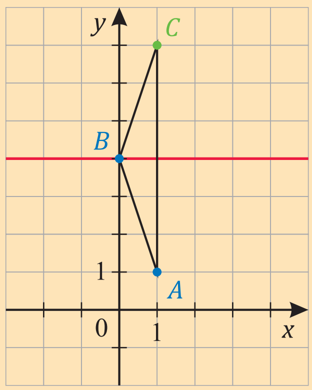
A harmadik csúcs: $C(-1;\ 1)$.

b)



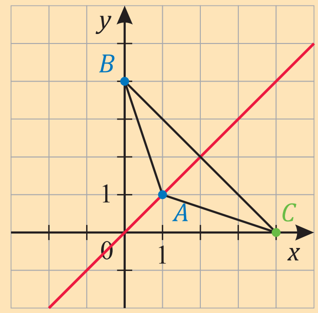
A harmadik csúcs: $C(2;\ 4)$.

c)



A harmadik csúcs: $C(1;\ 7)$.

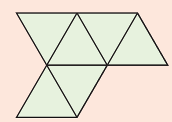
d)



A harmadik csúcs: $C(4;\ 0)$.

Tervezz! Alkoss!

Vágj ki hat egyforma szabályos háromszöglapot kartonpapírból! Tervezz minél több síkidomot, amelyeket a hat háromszögből raksz össze! Ezeket rajzold le a füzetedbe! Mindig teljes oldalaknak kell illeszkedni egymáshoz. Az így kapott síkidomokat el is nevezheted, ha emlékeztetnek valamire.
Egyet mi is építettünk. Ezt mi pisztolynak nevezzük!



Feladatok

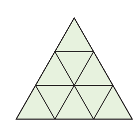
1. Egy szimmetrikus háromszög egyik oldalának hossza 4 cm, a másik oldalának hossza pedig 3 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldalának a hossza? Szerkeszd meg a füzetedbe!

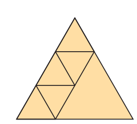
2. Az egyenlő szárú háromszög két oldalának hossza 5 cm és 2 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldalának a hossza? Szerkeszd meg a füzetedbe!

3. Megadunk a koordináta-rendszerben hat pontot: $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ 1)$, $D(4;\ -1)$, $E(7;\ 4)$, $F(7;\ -2)$. Válassz közülük hármat úgy, hogy azok egy egyenlő szárú háromszög csúcsai legyenek! Hány megfelelő ponthármast találtál?

4. Mekkorák lehetnek a szimmetrikus háromszög hiányzó szögei, ha az egyik szöge 56°-os?

5. Az ábrán látható szabályos háromszöget kilenc, illetve hat szabályos háromszögre vágtuk. Hogyan vágnál szét egy szabályos háromszöget nyolc szabályos háromszögre?



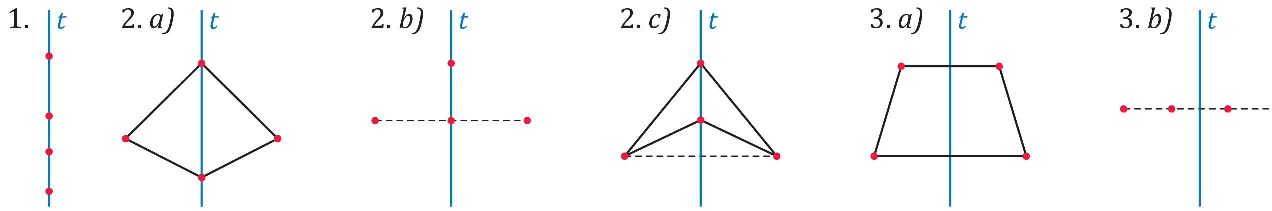


Játék

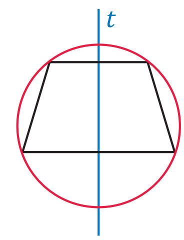
Keressetek 1 perc alatt a koordináta-rendszerben olyan C rácspontokat, amelyek az $A(1;\ 4)$ és a $B(4;\ 2)$ pontokkal szimmetrikus háromszöget alkotnak! Az idő leteltekor sorban egyesével olvassátok fel a talált pontok koordinátáit! Amit többen is írtak, azt a pontot mindenki áthúzza a füzetében. A győztes az lesz, akinek a legtöbb nem áthúzott pontja marad!

10. TENGELYESEN SZIMMETRIKUS NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Vizsgáljuk meg négy pont szimmetrikus helyzeteit!
1. A négy pont a tengelyre illeszkedik.
2. Két pont illeszkedik a tengelyre, a további kettő egymás tükörképe.
3. Egyik pont sem illeszkedik a tengelyre, kettő-kettő egymás tükörképe.



Ha a négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen és szimmetrikus helyzetűek, akkor a négy pontot összekötve **tengelyesen szimmetrikus négyszög**et, vagyis **tengelyesen tükrös négyszög**et kapunk.
Deltoidot kapunk, ha két pont illeszkedik a tengelyre.
Láthatjuk, hogy ez lehet konvex *(2. a) ábra)* és konkáv is *(2. c) ábra).*
Ha egyik pont sem illeszkedik a tengelyre, akkor trapézt kapunk. Ezt a trapézt nevezzük **szimmetrikus trapéz**nak *(3. a) ábra).*
A szimmetrikus trapéz köré lehet kört rajzolni.
Mivel erre a körre illeszkedik a szimmetrikus trapéz négy csúcsa, ezért mind a négy oldala húrja a körnek. Az ilyen négyszög húrnégyszög, de láttuk, hogy trapéz is.
Ezért **húrtrapéz**nak is nevezhetjük.

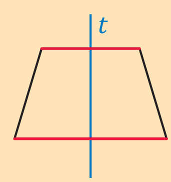


1. példa

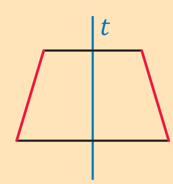
Gyűjtsük össze a húrtrapéz tulajdonságait!

Megoldás

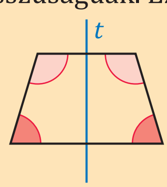
- Van két párhuzamos oldala. Ezeket alapnak nevezzük.



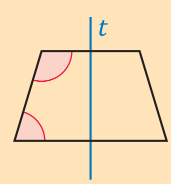
- Van két szemközti oldala, amelyek egyenlő hosszúságúak. Ezeket szárnak hívjuk.



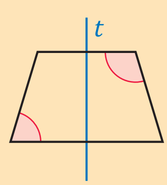
- Az alapon fekvő két-két szöge egyenlő.



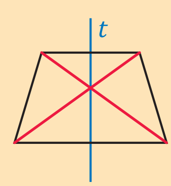
- A szárakon fekvő két-két szög összege 180°.



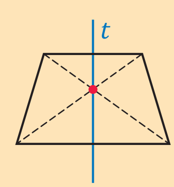
- A két-két szemközti szög összege 180°.



- Átlói egyenlő hosszúak.



- Az átlók a szimmetriatengelyen metszik egymást.



- Ha a húrtrapéz minden szöge egyenlő, akkor téglalap.
- Ha a húrtrapéz minden szöge és minden oldala egyenlő, akkor négyzet.

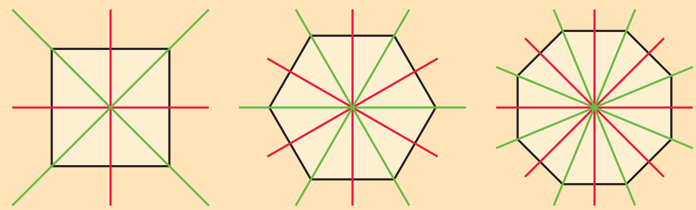
A szabályos sokszögeknek nem csak egy szimmetriatengelye van.

2. példa

Rajzoljuk meg a szabályos négyszög, hatszög, nyolcszög szimmetriatengelyeit! Adjuk meg a tengelyek számát!

Megoldás

Két szemközti csúcsot összekötő egyenes és két szemközti oldal közös szakaszfelező merőlegese is szimmetriatengelye lesz a sokszögnek.
A páros oldalszámú sokszögek esetén a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával egyenlő.

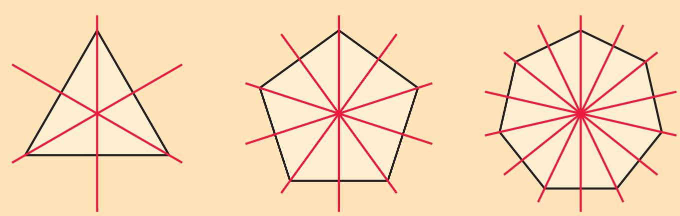


3. példa

Rajzoljuk meg a szabályos háromszög, ötszög, hétszög szimmetriatengelyeit! Adjuk meg a tengelyek számát!

Megoldás

A sokszögek tetszőleges csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes szimmetriatengelye lesz a sokszögnek.
Páratlan oldalszámú sokszögek esetén is a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával egyenlő.

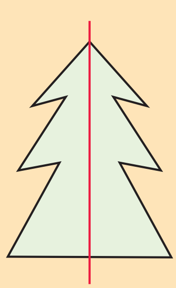


A **sokszög**ek között is vannak tengelyesen szimmetrikusak.

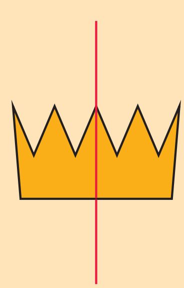
4. példa

Rajzoljunk néhány tengelyesen szimmetrikus sokszöget a tengelyével! Az ábrák lehetőleg szemléltessenek valamilyen hétköznapi dolgot!

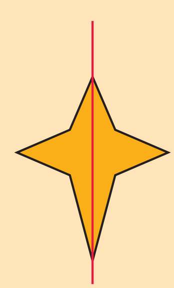
Megoldás



fenyőfa



korona



négyágú csillag

Feladatok

1. Lehet-e egy négyszög
a) húrnégyszög és nem trapéz;
b) húrnégyszög és rombusz;
c) húrnégyszög és deltoid;
d) deltoid és téglalap;
e) téglalap és rombusz;
f) rombusz és nem trapéz?

2. Rajzolj olyan deltoidot, amelynek pontosan három szöge egyenlő nagyságú! Mekkora szögeket használtál?

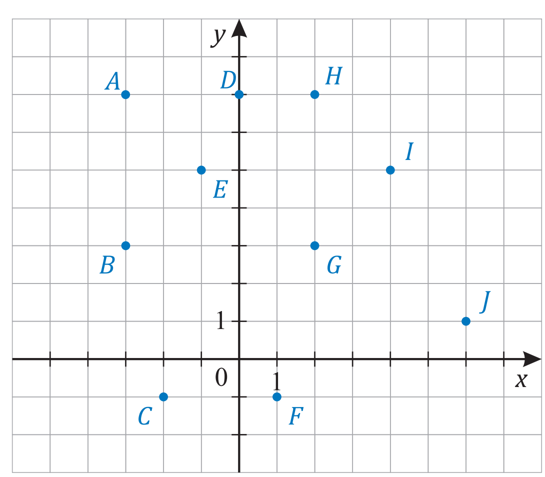
3. Egy deltoidnak egy 110°-os és egy 80°-os szöge van. Mekkorák lehetnek a hiányzó szögei?

4. A húrtrapéz egyik szöge 55° 28'. Add meg a hiányzó szögeit!

5. Egy 3 cm oldalú rombusz egyik szöge fele egy másik szögének. Szerkessz ilyen rombuszt!

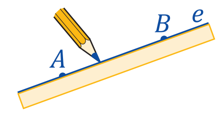
6. Melyik igaz, melyik hamis?
a) A deltoid szimmetriaátlója felezi a másik átlót.
b) A deltoidnak van két-két szomszédos egyenlő hosszúságú oldala.
c) Ha egy négyszögnek van szimmetriaátlója, akkor az deltoid.
d) Ha egy négyszögnek nincs szimmetriaátlója, akkor az nem deltoid.
e) A deltoidnak van két egyenlő szöge.
f) Ha egy négyszögnek két szöge egyenlő, akkor az deltoid.
g) Ha egy négyszögnek két-két oldala egyenlő hosszúságú, akkor az deltoid.
h) Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az deltoid.
i) Minden rombusz deltoid.
j) Van olyan rombusz, ami nem deltoid.

7. Az ábrán látható pontok közül válassz négyet úgy, hogy azok
a) téglalapot;
b) deltoidot;
c) rombuszt;
d) húrtrapézt
alkossanak!

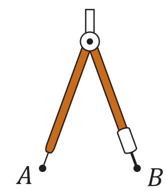


Az ábrák készítéséhez vonalzót és körzőt használtunk. A síkidomok tükrözését is vonalzó és körző segítségével végeztük. Megtanultuk, hogy szerkesztésről akkor beszélünk, ha a vonalzónknak csak az egyik élét használjuk, és betartjuk a következőket:

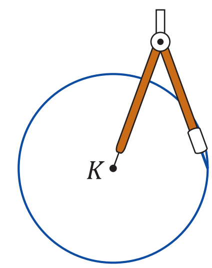
– A vonalzót két adott ponthoz illesztve, meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.



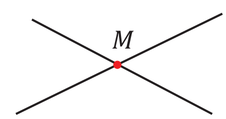
– Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.



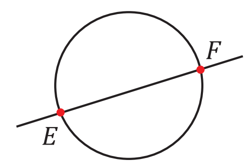
– Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.



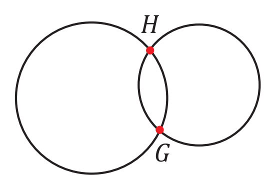
– Két egyenes metszéspontját meghatározhatjuk.



– Egyenes és kör metszéspontjait meghatározhatjuk.



– Két kör metszéspontjait meghatározhatjuk.



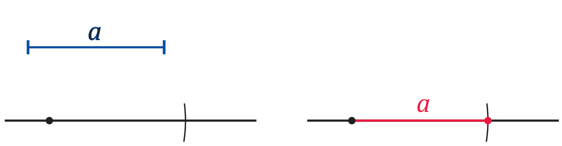
Ha csak egyélű vonalzót és körzőt, valamint a fenti eljárásokat használjuk a szerkesztéshez, akkor **euklideszi szerkesztés**ről beszélünk. Nevét Eukleidész ókori matematikusról kapta. A **szerkesztés** továbbra is euklideszi szerkesztést fog jelenteni a számunkra.

Kutatómunka

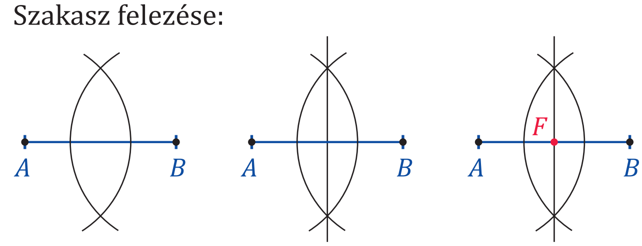
Készíts egy rövid előadást Eukleidészről!

A következő ábrasorozatok néhány egyszerű szerkesztés lépéseit mutatják.

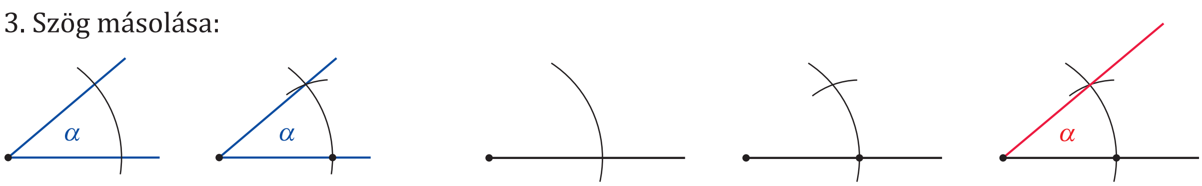
1. Szakasz másolása:



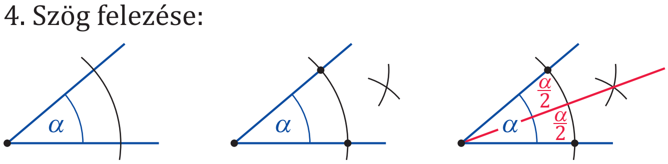
2. Szakasz felezése:



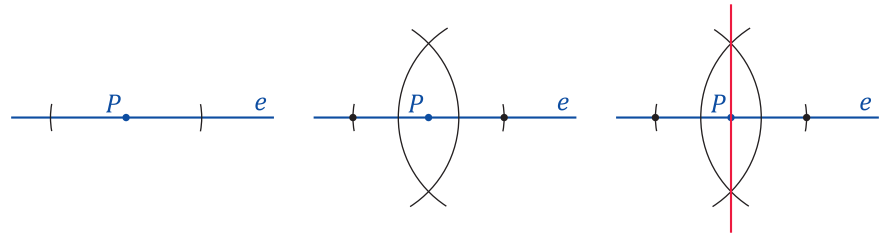
3. Szög másolása:



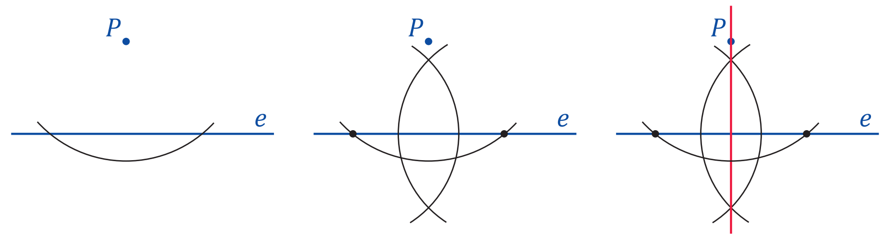
4. Szög felezése:



5. Adott egyenesre adott pontjában merőleges szerkesztése:



6. Adott egyenesre egy rá nem illeszkedő adott pontból merőleges szerkesztése:



Az ábrák tanulmányozása után a füzetedben készítsd el a fenti szerkesztéseket!

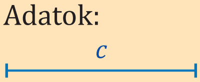
Megjegyzések
1. Ismerjük a merőleges szerkesztését, tudunk szöget felezni, szöget másolni, ezért 45°-os, 22,5°-os, 135°-os, 225°-os stb. szöget is tudunk szerkeszteni.
2. 60°-os szöget tudunk szerkeszteni (szerkesztünk egy szabályos háromszöget, annak minden szöge 60°-os). Szögfelezéssel, szögmásolással eljuthatunk a 30°-os, 15°-os, 75°-os, 120°-os, 150°-os stb. szögek szerkesztéséhez is.

1. példa

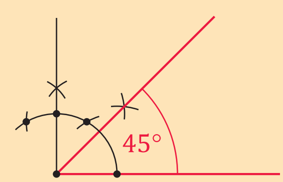
Szerkesszük meg a háromszöget, ha a *c* oldala 25 mm hosszú, és a rajta fekvő két szög 45°-os és 75°-os!

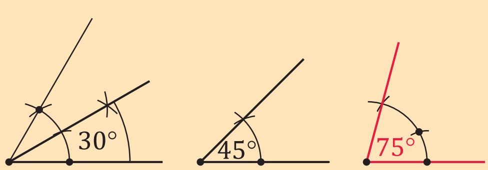
Megoldás

Adatok:



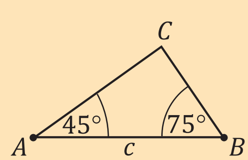
Az adatok között szerepel a 45°. Egy tetszőleges egyenesre merőlegest szerkesztünk, majd a kapott derékszöget elfelezzük. Így megkapjuk a 45°-os szöget.





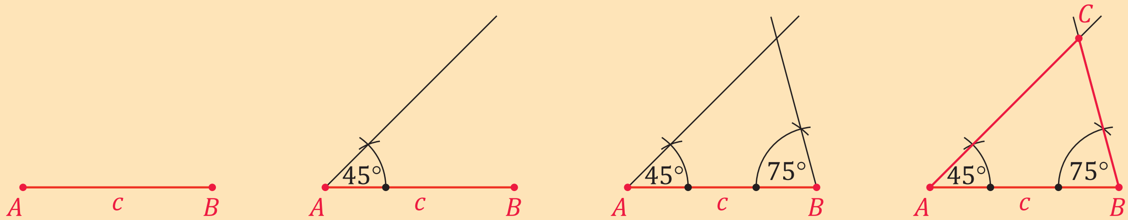
Az adatok között szerepel a 75°. Mivel 75° = 45° + 30°, ezért ezt a szöget is meg tudjuk szerkeszteni. 45°-os szöget már tudunk szerkeszteni. A 30°-os szöget a 60°-os szög felezésével kapjuk. A kettő egymás mellé másolásával kapjuk a 75°-os szöget.

Vázlat:



Szerkesztés menete:
1. Felvesszük a *c* szakaszt, elnevezzük a végpontokat *A*-nak és *B*-nek.
2. Az *A* ponthoz másoljuk a 45°-os szöget.
3. A *B* ponthoz másoljuk a 75°-os szöget.
4. A két szögszár metszéspontját elnevezzük *C* pontnak.

Kivitelezés:



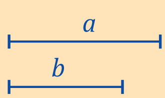
A szerkesztés menetében megadott lépéseket követjük.

2. példa

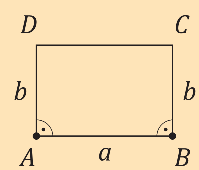
Szerkesszük meg a téglalapot, ha adott két oldala!

Megoldás

Adatok:



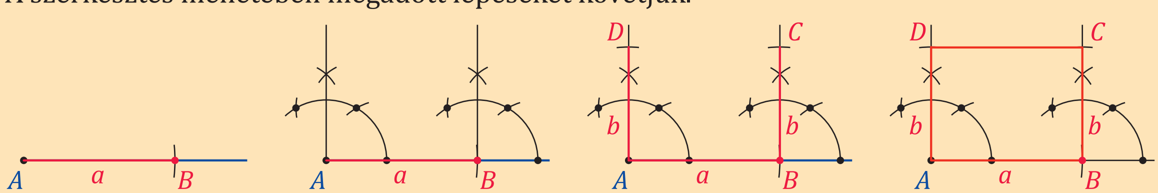
Vázlat:



Szerkesztés menete:

1. Az *A* kezdőpontú félegyenesre másoljuk az *a* szakaszt, így megkapjuk a *B* pontot.
2. Az *AB* egyenesre az *A*-ban és a *B*-ben merőlegest szerkesztünk.
3. A *b* szakaszt rámásoljuk az így kapott mindkét egyenesre, így kapjuk a *D* és a *C* pontokat.
4. A *CD* szakasz megrajzolásával kész az *ABCD* téglalap.

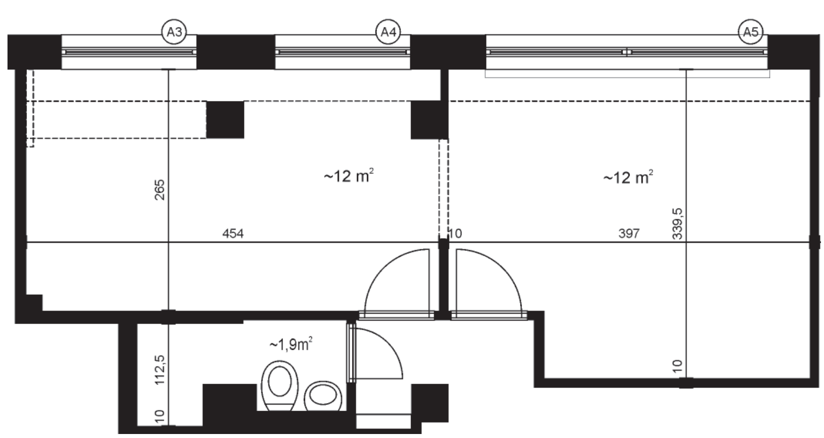
Kivitelezés:
A szerkesztés menetében megadott lépéseket követjük.



A műszaki, építészeti rajzokat szerkesztéssel készítették.

A képen egy lakás alaprajzának részlete látható. A műszaki rajzokon modellezik a valóságot.

Ma már ezeket a műszaki rajzokat számítógéppel készítik.



Feladatok

1. Rajzolj a füzetedbe egy szakaszt! Szerkesztéssel oszd négy egyenlő részre!

2. Rajzolj a füzetedbe egy tompaszöget! Szerkesztéssel oszd négy egyenlő részre!

3. Rajzolj egy egyenest, és végy fel rajta egy pontot! Szerkessz a pontban egy erre az egyenesre merőleges egyenest! Ezen az egyenesen is végy fel egy pontot, és ismét szerkessz a pontban erre az egyenesre is egy merőleges egyenest! Az első és a harmadik egyenesnek milyen helyzetűnek kell lennie?

4. Az a és a b egyenes merőleges egymásra. Szerkessz egy merőleges egyenest a-ra és szerkessz egy másik merőleges egyenest b-re! Milyen síkidomot határoz meg a négy egyenes?

5. Az a és a b egyenes párhuzamos egymással. Szerkessz egy merőleges egyenest a-ra és szerkessz egy másik merőleges egyenest b-re! Milyen síkidomot határoz meg a négy egyenes?

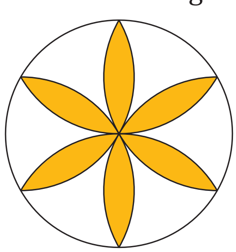
6. Rajzolj a füzetedbe egy szöget három példányban! Szerkeszd meg a szög felét, negyedét és háromnegyedét!

7. Rajzolj a füzetedbe három hegyesszöget, nevezd el őket: α, β, γ! Szerkeszd meg a következő szögeket:
a) $\alpha + \beta + \gamma$; *b)* $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$; *c)* $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma$; *d)* $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma$.

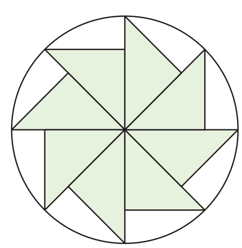
8. Szerkeszd meg a következő szögeket:
a) 30°; *b)* 15°; *c)* 22,5°; *d)* 135°; *e)* 120°; *f)* 150°.

9. Szerkeszd meg a következő ábrák másolatait!

a)



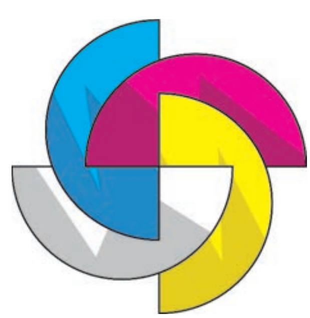
b)



10. Figyeld meg az ábrák szerkezetét, majd szerkesztéssel másold át a füzetedbe őket! Tervezz te is ilyen mintákat!

a)

b)



Mit tanultunk ebben a fejezetben?

A mindennapi életben nagyon fontos, hogy a mérésekkel tisztában legyünk, ezért most is áttekintettük a hosszúság, a tömeg és az idő mértékegységeit. A geometriai számításokban nemcsak a hosszúság, hanem a terület és a térfogat mérése is alapvető szerepet játszik, az ezekhez kapcsolódó mértékegységeket is jól kell használnunk. Ezek után foglalkoztunk síkbeli és térbeli alakzatokkal. A **szög mérése** és a szögekkel kapcsolatos fogalmak is szükségesek a geometriai szövegek megértéséhez. A **kör**rel kapcsolatos fogalmakat sem felejthetjük el. A matematikai szövegek megértéséhez a következő fogalmak nélkülözhetetlenek: **sugár, átmérő, húr, körív, körszelet, körcikk, körgyűrű, szelő, érintő.** Megismerkedtünk egy fontos fogalommal, az **egybevágóság**gal, majd ezt követően a **tengelyes tükrözés**sel. Megvizsgáltuk a tulajdonságait, és megfigyeltük a minket körülvevő világban a **tengelyes szimmetriát.**

Csoportmunka

A következő kérdésekkel és válaszokkal röviden összefoglaljuk a legfontosabbakat a fejezetből. Olvassátok el, majd a padtársak 5-5 kérdés választásával szóban vizsgáztathatják egymást.

1. Hogyan csoportosítjuk a háromszögeket a szögeik alapján?
   Hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek.
2. Hogyan csoportosítjuk a háromszögeket az oldalaik alapján?
   Általános háromszögek, egyenlő szárú háromszögek és egyenlő oldalú (vagy szabályos) háromszögek.
3. Mekkora a váltószám a fok és a szögmásodperc között?
   Mivel 1 fok 60 szögperccel egyenlő, és 1 szögperc 60 szögmásodperccel egyenlő, ezért a keresett váltószám $60 \cdot 60$, azaz 3600.
4. Ha egy háromszögben van egy 24°-os és egy 36°-os szög, akkor ez milyen háromszög?
   A háromszög szögeinek az összege 180°. Ezért ebben a háromszögben a hiányzó szög nagysága: $180° - 24° - 36° = 120°$. Vagyis tompaszögű háromszögről van szó.
5. Milyen adatok határozzák meg egyértelműen a háromszöget?
   Három oldala;
   két oldala és a közbezárt szöge;
   egy oldala és a rajta fekvő két szöge.
6. Mit kell tudni a kör érintőjéről és az érintési pontba húzott sugárról?
   A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
7. Mit kell tudni a körön kívüli pontból a körhöz húzott két érintőszakasz hosszáról?
   A körön kívüli pontból a körhöz húzható két érintőszakasz hossza egyenlő.
8. Soroljuk fel a tengelyes tükrözés néhány tulajdonságát!
   Egyenestartó, körtartó, távolságtartó, szögtartó.
   A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel.
   A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást.
   A tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.
9. Lehet-e egy háromszögnek pontosan két szimmetriatengelye?
   Az egyenlő szárú háromszögeknek egy, az egyenlő oldalú háromszögeknek pedig három szimmetriatengelye van. Pontosan két szimmetriatengelye nem lehet a háromszögnek.

10. Melyik az a tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelyben a tengely csak a csúcsokra illeszkedik?
    Ez a négyszög a deltoid.
11. Melyik az a tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelyben a tengely nem halad át csúcsokon?
    Ez a négyszög a húrtrapéz.
12. Hány szimmetriatengelye van a szabályos hatszögnek és a szabályos hétszögnek?
    Minden szabályos sokszögben a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával egyenlő, ezért a szabályos hatszögben 6, a szabályos hétszögben 7 szimmetriatengely van.

Tesztfeladatok

A következő nyolc feladat mindegyikében csak egy helyes válasz van!

1. A következő állításokat háromszögekről fogalmaztuk meg. Jelöld be a helyes választ!
A: Létezik olyan háromszög, amelyiknek két tompaszöge van.
B: Egyenlő szárú háromszög csak a hegyesszögű háromszögek között található.
C: Létezik olyan derékszögű háromszög, amelyikben a derékszögnél nagyobb és kisebb szög is van.
D: Minden háromszögben van legalább két hegyesszög.
E: Ha egy háromszögben a legkisebb szög hegyesszög, akkor az biztosan hegyesszögű háromszög.

2. Melyik mennyiséget kell kihagynunk, hogy mindegyik ugyanannyi legyen?
A: 21 600 másodperc; B: negyed nap; C: 6 óra;
D: 36 000 másodperc; E: 360 perc.

3. Add meg a háromszög hiányzó szögét: 42° 30', 58° 30', ...!
A: 101°; B: 100°; C: 80°; D: 79°; E: 60°.

4. A tengelyes tükrözés néhány tulajdonságát soroltuk fel. Melyik hibás?
A: A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel.
B: A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást.
C: A tengelyre merőleges egyenes képe párhuzamos a tengellyel.
D: Ha egy kör érinti a tengelyt, akkor a képe ugyanott érinti a tengelyt.
E: Ha egy kör metszi a tengelyt, akkor a képe ugyanott metszi a tengelyt.

5. Egy deltoid három csúcsa: (1; 1), (1; 5), (–2; 4). Melyik lehet a deltoid negyedik csúcsa?
A: (–3; –1); B: (–3; 1); C: (3; 4); D: (–2; 8); E: (2; 4).

6. Egy rombusz három csúcsa: (1; 1), (1; 7), (0; 4). Melyik lehet a rombusz negyedik csúcsa?
A: (–3; –1); B: (–3; 1); C: (3; 4); D: (–2; 8); E: (2; 4).

7. Egy húrtrapéz három csúcsa: (1; 1), (1; 5), (–2; 4). Melyik lehet a húrtrapéz negyedik csúcsa?
A: (–3; –1); B: (–3; 1); C: (3; 4); D: (–2; 8); E: (2; 4).

8. Egy négyszögben a szimmetriatengelyek száma nem lehet
A: 0; B: 1; C: 2; D: 3; E: 4.

Feladatok

9. Add meg centiméterben és méterben a következő hosszúságokat!

a) 42 000 mm; *b)* 120 000 mm; *c)* 130 dm;
d) 3100 dm; *e)* 1,8 km; *f)* 0,6 km.

10. Add meg grammban és dekagrammban a következő tömegeket!

a) 17 kg; *b)* 0,23 kg; *c)* 5,1 t;
d) 0,03 t; *e)* 35 000 mg; *f)* 7000 mg.

11. Add meg percben és órában a következő időtartamokat!

a) 4320 s; *b)* 37 800 s; *c)* 1,5 nap;
d) 0,75 nap; *e)* 0,5 hét; *f)* 0,25 hét.

12. A szobamérleg 80,4 kg-ot mutatott, amikor Lóri ráállt a megrakott bevásárlókosárral együtt. A kosár nélkül a mérleg csak 75,8 kg-ot mutatott. Add meg a teli kosár tömegét kilogrammban, dekagrammban és grammban!

13. Emőke hétfőn délelőtt 14 km-t, délután 18 km-t utazott, kedden pedig összesen másfélszer annyit, mint az előző napon. Szerdán a hétfő délutáni távolságnak a kétharmadát tette meg.

a) Hány kilométert utazott összesen ezen a három napon?
b) Hány méter hiányzik még ahhoz, hogy ez a távolság 100 km legyen?
c) Hányadrésze a szerdai táv a keddinek?
d) Igaz-e, hogy kedden a teljes távnak megtette több mint a felét?

14. Egy egyenlő szárú háromszögnek van 13,4 cm és 2 dm hosszúságú oldala. Hány milliméter lehet a harmadik oldal hossza?

15. Döntsd el a következő egyenlő szárú háromszögekről a szögek nagysága alapján, hogy azok hegyesszögűek, derékszögűek vagy tompaszögűek? Add meg a hiányzó szögek nagyságát!

a) Az alapon fekvő szögei 38°-osak.
b) A szárak által bezárt szög 30°-os.
c) Az alapon fekvő egyik szög 10°-kal nagyobb, mint a szárak közötti szög.
d) Két szögének összege egyenlő a harmadikkal.
e) Két szögének különbsége egyenlő a harmadikkal.
f) Az alapon fekvő egyik szög 10-szeresével egyenlő a szárak közötti szög.

16. Lillus és Levi is szerkesztett egy-egy háromszöget a füzetébe. Mindkét háromszögnek van 3 cm hosszúságú oldala. Lillus háromszögének van 4 cm-es, Levi háromszögének pedig 5 cm-es oldala.

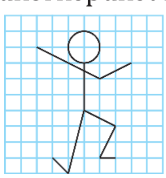
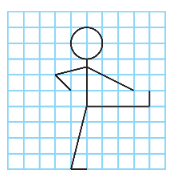
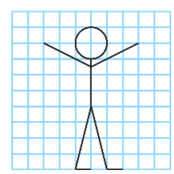
a) Lehetséges-e, hogy a két háromszög nem egybevágó? Rajzzal indokold a válaszodat!
b) Elképzelhető-e, hogy a két gyerek háromszöge egybevágó? Ha igen, akkor szerkeszd meg ezt a háromszöget!
c) Add meg méréssel az előbb szerkesztett háromszög legnagyobb szögét!
d) Lillus egy szökőév augusztusában ezt mondta öccsének, Levinek: 24 óra múlva megünnepeljük a születésnapomat, és utána 5640 óra múlva a tiédet! Levi születésnapja után hány nap múlva mondhatja legközelebb Lillus ismét ugyanezt a mondatot?

17. Szemléltesd rajzzal a következő, tanult fogalmakat: húr, átmérő, körív, körszelet, körcikk, körgyűrű, szelő, érintő!

18. Szerkessz egy tetszőleges derékszögű háromszöget! Tükrözd
a) az egyik befogójának az egyenesére;
b) az átfogójának az egyenesére;
c) egy tetszőleges egyenesre, amely a háromszögbe belevág!

19. Egy derékszögű háromszög minden oldalára kifelé szabályos háromszöget szerkesztettünk! (A szerkesztett szabályos háromszögek egyik oldala azonos a derékszögű háromszög egyik oldalával.) Lehet-e az így kapott ábra tengelyesen szimmetrikus? Ha igen, akkor szerkessz ilyet a füzetedbe! Jelöld a szimmetriatengelyt is!

20. A négyzetrácsra rajzolt pálcikaembereket könnyen lemásolhatod a füzetedbe! Rajzold meg a tükörképüket is!

a)

b)

c)


21. Írd le nyomtatott betűkkel a füzetedbe a TÜKÖR szót! Legyen a T betű függőleges szára a tükrözés tengelye. Tükrözd a betűket erre a tengelyre!

22. Egy visszapillantó tükörben így látszik egy gépkocsi rendszámának három betűje:

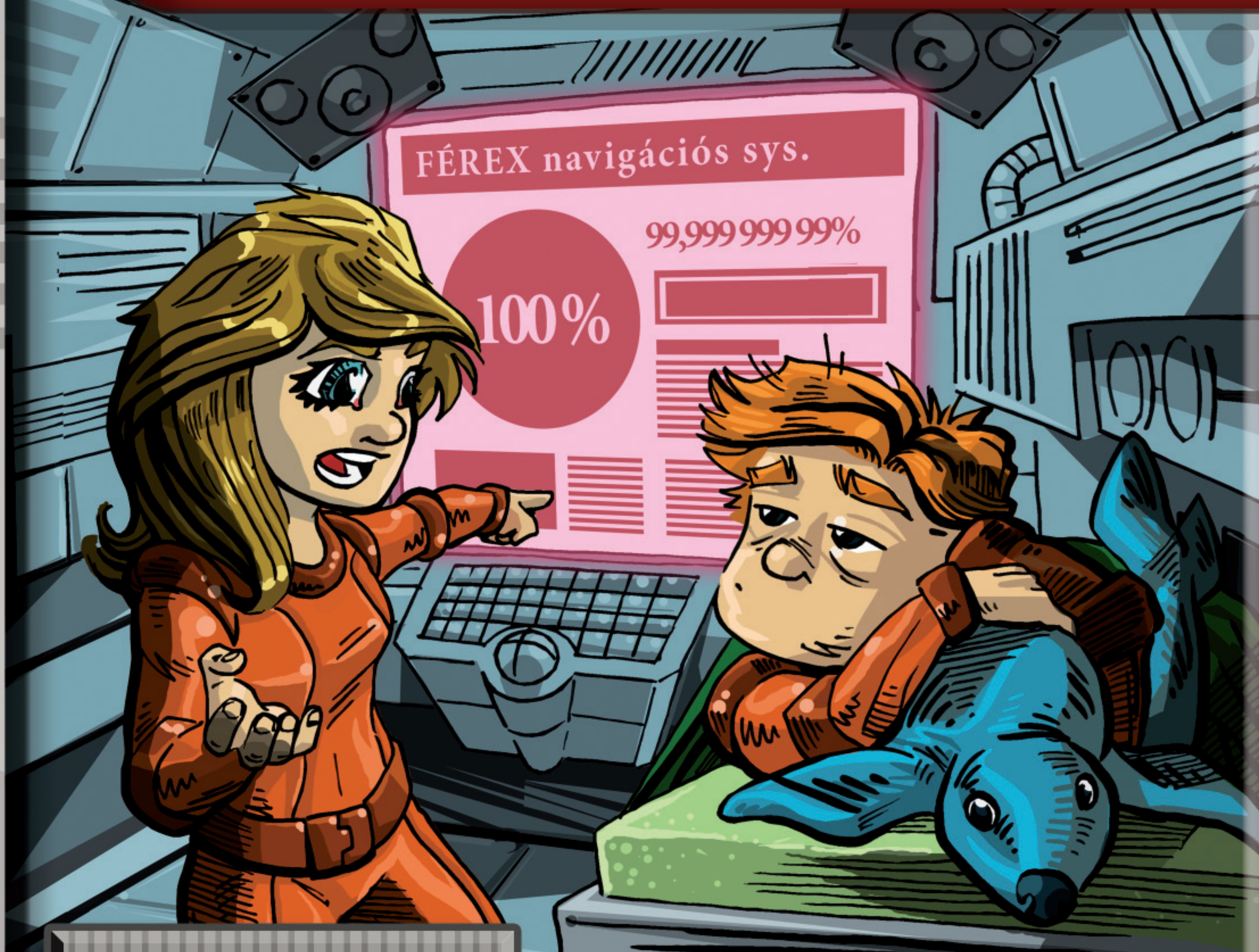
A három betű után egy kötőjel és három számjegy következik.
a) Adj meg egy ilyen rendszámot!
b) Hány darab ilyen rendszám van, ha tudjuk, hogy a három számjegy nem mindegyike azonos!

23. A gépkocsikra egyedi rendszámok is kérhetők! Rajzold le a képen látható egyedi rendszámot úgy, ahogyan egy
a) tükörben; *b)* tócsában
lehetne látni!

24. Móra Ferenc Kincskereső kisködmön című könyvéből vettük ezt a rövid részletet:
„Azon az estén ezt a szót kapartam bele a jégvirágok mezejébe:

Édesapám odaállt mögém a méccsel, hogy jobban lássa, mit dolgozom. A betűk árnyéka óriássá nyúlva vetődött ki a hóra, s úgy reszketett a mécs lobogásában, mint valami varázsírás.
– Te, az S-et megfordítva írtad – kacagott édesapám –, nézd, így kell azt írni."
a) Hogyan nézne ki a felirat, ha nem csak az S, hanem minden betűt „megfordítva" írtunk volna?
b) Mit jelent ebben a szövegkörnyezetben a „megfordítva" kifejezés? Magyarázd el matematikai szakszavakkal!
c) Hogyan nézne ki a KINCS szó, ha az egészet egyben tükröznénk egy függőleges, illetve egy vízszintes tengelyre?

III. Egyenletek, függvények



Panni felrázta a bóbiskoló Attilát.

– Elromlott a központi számítógép – suttogta fojtott hangon, hogy a többieket fel ne riassza – már órák óta csak azt mutatja, hogy 100% és 99,999 999 99%.

– Nem romlott el – morogta Atis a másik oldalára fordulva – a 100% a bolygó neve, a másik a megtett út, az előző start és a következő cél között.

– Miért nem kilométerben mutatja, vagy fényévekben, vagy az eltelt órákban?

– Tudja úgy is, de azt programoztam be, hogy a megtett távolság arányát mutassa, százalékos formában. Majd reggel átváltom neked. Ha akarod, azt mutatja, hogy az eltelt idő az egésznek hány százaléka vagy azt, hogy az üzemanyagnak hányad részét használtuk el. Bármit meg tud mutatni… – nyögte Attila és a fejére húzta a fóka alakú párnát.

Mikor felébredt, Panni büszkén mutatott a kijelzőre.

– Nézd, játszottam vele reggel, és én is be tudtam állítani. Most azt mutatja, hogy a teljes távolság 6289 fényév, ebből megtettük szinte az egészet, és már csak az út 0,000 000 01 része van hátra.

– Ügyes vagy! – mondta Attila, kidörzsölve a maradék álmot a szeméből. – Az a jó a FérExben, hogy az út nagyrészét szinte egy pillanat alatt tesszük meg, aztán a megközelítés vesz el még egy kicsi időt.

1. AZ ARÁNY FOGALMA

Mit jelenthetnek az alábbi mondatok? Beszéljétek meg!

Arányos testalkata van.
A munka végén arányosan osztották el a fizetségüket.
A tervrajzon jól láthatóak az épület arányai.
Arányaiban ma több a fiatal lakásvásárló, mint a válság előtt.
Leonardo da Vinci festészetről szóló művében tárgyalja az emberi test arányait és mozdulatait.

Csoportmunka

Az országok zászlóival természetismeret-, történelem- és más órákon is találkoztok. Mely alkalmakkor jelennek meg az utcákon a nemzeti színű lobogók? Hol láthatunk magyar zászlót? Mely országok zászlóit ismeritek még fel? Milyenfajta zászlókat ismertek még?




1. példa

Számítsuk ki a képen látható magyar nemzeti zászló piros színű területének és az egész zászló területének hányadosát! A számoláshoz szükséges adatokat mérjük meg!

Megoldás

A 3 cm-szer 6 cm-es téglalapba rajzolt magyar zászló mindhárom színének területe 6 cm^2.

A piros terület és az egész zászló 18 cm^2-es területének hányadosa $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Ugyanígy 1 : 3 a fehér rész és a zászló területének aránya, valamint a zöld rész és a zászló területének aránya is.

A kapott hányados a két terület aránya.
Ez a hányados bármilyen méretű magyar zászlóban ugyanennyi. Mondhatjuk úgy is, hogy:
- a piros és az egész zászló területének aránya **egy a háromhoz,**
- **egy aránylik a háromhoz,**
- a zászló területének egyharmada piros,
- a zászló területének egyharmadszorosa piros.

Ezt az arányt így jelöljük: 1 : 3.
Az „**egyharmada**”, vagy „**harmada**” ugyanazt jelenti, mint az „**egyharmadszorosa**”!
(A magyar zászló rövidebb és hosszabb oldalának aránya 1 : 2, ezért helyeztük egy 3 cm × 6 cm-es téglalapba.)

2. példa

Számítsuk ki a képen látható lett nemzeti zászló különböző színű területeinek egymáshoz és az egész zászló területéhez való arányát! Az 1 m-szer 2 m-es zászlón középen egy 20 cm-es fehér csík látható.

Megoldás

A fehér csík területe: 2 dm · 20 dm = 40 dm^2.
A két piros csík területe: 2 · 4 dm · 20 dm = 160 dm^2.
A zászló teljes területe: 10 dm · 20 dm = 200 dm^2.
A fehér csík és a zászló területének aránya: $\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, vagy 1 : 5.

A két piros csík és a zászló területének aránya: $\frac{160}{200} = \frac{4}{5}$, vagy 4 : 5.

A fehér és a piros terület aránya $\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$, vagy 1 : 4.

Figyeljetek arra, hogy arányok felírásakor a számok sorrendje nem cserélhető fel.
Például: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$, 2 : 3 ≠ 3 : 2 és $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{1}$, 1 : 5 ≠ 5 : 1.

Két szám (vagy mennyiség) aránya a két szám hányadosa. Azt fejezi ki, hogy az első szám hányadrésze (hányszorosa) a másodiknak.

Megadása történhet arányként (3 : 2), hányadosként $\left(\frac{3}{2}\right)$ vagy tizedes tört alakban is (1,5).

Például: 3 : 2 = $\frac{3}{2}$; vagy az 1,5 és a 4 aránya: $\frac{1,5}{4} = \frac{3}{8}$ = 3 : 8. A 6 és a 9 aránya: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ = 2 : 3.

A könnyebb érthetőség kedvéért általában arra törekszünk, hogy az arányt egész számok hányadosaként, egyszerűsített tört alakban adjuk meg.
Az arány **két mennyiség összehasonlításából** állapítható meg. Jól mutatja az összehasonlítható mennyiségek egymáshoz való viszonyát. Az arány egyik szinonimája a viszonyszám.

3. példa

Az iskolai focibajnokság első három helyezettjének nyári táborozásához az iskola 60 ezer forinttal járul hozzá. Hogyan oszthatjuk el a nyereményt a három osztály között?

Megoldás

Többféle elosztás lehetséges, megadunk néhányat példának:

	1. helyezett	2. helyezett	3. helyezett	A nyeremények aránya
I. elosztás	30 ezer Ft	20 ezer Ft	10 ezer Ft	3 : 2 : 1
II. elosztás	20 ezer Ft	20 ezer Ft	20 ezer Ft	1 : 1 : 1
III. elosztás	45 ezer Ft	10 ezer Ft	5 ezer Ft	9 : 2 : 1
IV. elosztás	30 ezer Ft	15 ezer Ft	15 ezer Ft	2 : 1 : 1

1. AZ ARÁNY FOGALMA

A különböző elosztások könnyebben összehasonlíthatók, ha az arányokat nézzük.
Ha az osztályotok lenne a győztes, akkor melyik elosztást választanád?
Legkedvezőbb a nyertes számára a III. elosztás, mert ekkor jut neki a legtöbb nyeremény.

45 000 : 10 000 : 5000 = 9 : 2 : 1.

A 3. helyezettnek érdemes a II. elosztást választania, mert ebben az esetben jár a legjobban.
A példában kettőnél több szám aránya szerepelt. Hármas aránypárt nem írunk fel tört alakban.

Feladatok

1. Írjatok egy olyan mondatot, amelyben szerepel az arány szó!

2. Add meg egyszerűsített tört alakban és arányként is a következő számok arányát!
a) 12 és 1; *b)* 20 és 2; *c)* 8 és 24; *d)* 40 és 400;
e) 36 és 8; *f)* 144 és 60; *g)* 56 és 72.

3. Add meg két egész szám hányadosaként, tovább nem egyszerűsíthető tört alakban és arányként is a következő számok arányát!
a) 1,2 és 0,1; *b)* 1,2 és 0,2; *c)* 0,12 és 3; *d)* 12 és 0,4; *e)* 12 és 50; *f)* 1,8 és 3,2;
g) $\frac{2}{3}$ és $\frac{5}{6}$; *h)* $\frac{2}{7}$ és $\frac{4}{21}$; *i)* $\frac{2}{7}$ és 1,2; *j)* $\frac{3}{8}$ és $\frac{1}{2}$; *k)* 1,25 és $\frac{3}{4}$; *l)* $\frac{3}{7}$ és $\frac{5}{13}$.

4. Egy szörpkészítményben a bodzasűrítmény mennyisége 2 dl. Ezt hígítják 8 dl vízzel.
a) Határozd meg a sűrítmény és a víz arányát!
b) Az összekevert szörp hányadrésze víz?
c) Mennyi a sűrítmény és a víz aránya?

5. *a)* Két szám aránya 5 : 7. A kisebbik 35. Mekkora a nagyobbik?
b) Két szám aránya 5 : 7. A nagyobbik 35. Mekkora a kisebbik?

6. Három szám aránya 1 : 2 : 5. A középső 12. Mekkora a másik két szám, ha
a) a középső szám 12;
b) a legnagyobb szám 100;
c) a legkisebb szám 5;
d) a három szám összege 80?

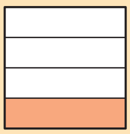
7. Az Önkéntes Állatbarátok Szövetségének szavazatszámláló bizottsága megállapította, hogy a két elnökjelölt közül Farkas Franciska 120, Medve Mihály csak 60 szavazatot kapott. Mi volt a jelöltekre leadott szavazatok aránya?

1. példa

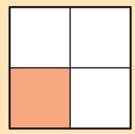
Osszuk fel a négyzetet két részre úgy, hogy a keletkezett részek területének aránya 1 : 3 legyen!

Megoldás

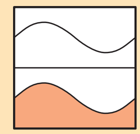
I. lehetőség:
Összesen 4 egységre kell felosztani. Lehet például így:



II. lehetőség:
Így is feloszthatjuk:



III. lehetőség:
Sőt, akár így is feloszthatjuk:



Tervezz a füzetedbe még egy-két 1 : 3 arányú felosztást!

2. példa

Róbert a Tiszta Bakonyért akció keretében TeSzedd-versenyt szervezett Matyinak és Máténak. A felajánlott 10 Túró Rudi lelkesítőleg hatott. Matyi rövid idő alatt egy 3 hold, Máté pedig egy 2 hold nagyságú területet tisztított meg a kirándulók által eldobált hulladéktól. (A hold egy régi területmérték.) Milyen arányban ossza el Róbert a 10 Túró Rudit Matyi és Máté között, ha az elvégzett munka arányában akarja jutalmazni őket? Hány Túró Rudit kapott Matyi és Máté?

Megoldás

Róbert először meghatározta, hogy a 10 Túró Rudiból mennyi jut egy hold megtisztított területért.
A 10-et elosztotta a megtisztított összterület nagyságával, 5-tel. 10 : 5 = 2.
A jutalomból 1 holdra 2 Túró Rudi jut, így Matyinak 3 · 2 = 6 Túró Rudi jár, Máténak pedig 2 · 2 = 4 darab.
A Matyi és Máté által megtisztított területek aránya 3 : 2, a jutalmak aránya: 6 : 4 = 3 : 2.
A két arány megegyezik, tehát ez a módszer a jutalmat a végzett munka **arányában osztja** el, ez az **arányos osztás**.

3. példa

Róbert a lányokat, Pannit, Natasát és Tamarát sem hagyta ki a versenyből. Számukra egy 15 szeletes pizzát ajánlott fel.
Amíg Panni 2 holdnyi területet, addig Natasa és Tamara 4-4 hold területet tisztított meg.
A jutalmak szétosztásánál Róbert alkalmazta az arányosítás módszerét.

Megoldás

Az összes megtisztított terület 2 + 4 + 4 = 10 hold. A 15 szeletes pizzából 1 holdra 15 : 10 = 1,5 szelet jut. A másfél szelet kicsit elgondolkodtatta Róbertet, de rendületlenül számolt tovább. Panni 2 holdjára 2 · 1,5 = 3 szelet jut; Natasa és Tamara 4-4 holdjára egyenként 4 · 1,5 = 6 szelet jut.
A megtisztított területek aránya 2 : 4 : 4 = 1 : 2 : 2. A jutalmak aránya 3 : 6 : 6 = 1 : 2 : 2.
Róbert elégedetten állapította meg, hogy az arányok megegyeznek.

4. példa

Jack kapitány Péter kalóza 15 kg, Pál kalóza pedig 10 kg aranyat zsákmányolt a király vámszedőinek hajójáról. A kincset 5 kilogrammonként fadobozokba rakták. Furfangos Jennire bízták a jutalom elosztását. A kapitány 50 tallér jutalmat adott a két kalóznak, amit Jenni a dobozok számának arányában osztott szét. Hány tallér jutalmat kapott a két kalóz?

Megoldás

Jenni az 50 tallért elosztotta a dobozok számával, 5-tel: 50 : 5 = 10.
A jutalomból 1 dobozra 10 tallér jutott.
Így az egyes jutalmak:
Péter kalóz: $3 \cdot 10 = 30$ és Pál kalóz $2 \cdot 10 = 20$ tallér jutalmat kapott.
A két kalóz által gyűjtött kincs aránya:
15 : 10 = 3 : 2.
A két kalóz által kapott jutalom aránya:
30 : 20 = 3 : 2.
A két arány megegyezik, tehát Jenni a jutalmat a zsákmány **arányában osztotta** el.

5. példa

A szakácsiskola főzőversenyt rendezett, összesen 12 ezer Ft jutalomért. Az első három helyen végzett tanulónak fél óra alatt minél több szilvás gombócot kellett készítenie. A jutalmat az elkészült gombócok arányában akarták szétosztani. Az egész iskola nekik drukkolt. A versenyzők által készített gombócok számát feljegyezték:

Gazsi	Kata	Szilvi
90 gombóc	60 gombóc	50 gombóc

Megoldás

Az arányos osztás módszerével határozzuk meg a tanulóknak járó jutalmat.

Összesen 200 gombócot készítettek. A 12 ezer Ft jutalomból 1 gombócra $\frac{12\,000 \text{ Ft}}{200} = 60$ Ft jut.
Jutalmuk:

Gazsi	Kata	Szilvi
$90 \cdot 60$ Ft = 5400 Ft	$60 \cdot 60$ Ft = 3600 Ft	$50 \cdot 60$ Ft = 3000 Ft

A verseny végén a szurkolók megették a gombócokat.
Számítsuk ki a gombócok számának arányát: 90 : 60 : 50 = **9 : 6 : 5.**
A jutalmak aránya: 5400 : 3600 : 3000 = 54 : 36 : 30 = **9 : 6 : 5.**
A két arány megegyezik. Az arányos osztást használtuk.

Feladatok

1. Egy téglalap kerülete 96 cm. Oldalainak aránya 3 : 5. Számítsuk ki a téglalap oldalait és a területét!

2. Egy téglalap rövidebb oldala 12 cm. Oldalainak aránya 3 : 7. Mekkora a kerülete és a területe?

3. Számítsuk ki azt a két számot, melyek aránya 2 : 5, és
a) az összegük 28; *b)* a kisebbik szám 22; *c)* az összegük 157,5;
d) a kisebbik szám 12,4; *e)* a nagyobbik 7,5; *f)* a különbségük 135!

4. Egy iskolában a fiúk és lányok aránya 19 : 21. Az iskolában 640 diák tanul. Hány lány és hány fiú jár az iskolába?

5. Mekkora az egyes részek hossza, ha egy 24 cm hosszú szakaszt osztottunk fel a következő arányokban?
a) 1 : 5; *b)* 1 : 2; *c)* 1 : 11; *d)* 1 : 1; *e)* 1 : 3; *f)* 1 : 5 : 6; *g)* 1 : 1 : 10; *h)* 1 : 1 : 6.

6. A vízen úszó jég víz alatti és víz feletti részének aránya 9 : 1. Egy jéghegy víz feletti részének térfogata 20 m^3.
a) Mennyi a jéghegy víz alatti részének a térfogata?
b) Hány köbméter az egész jéghegy?

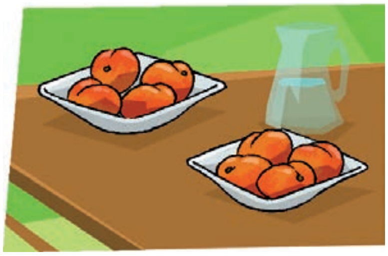
7. Orsi, Gazsi és Matyi testvérek. Szüleik azt gondolják, hogy úgy igazságos, ha a havi zsebpénzt életkoruk arányában kapják. Orsi 18, Gazsi 16, Matyi 12 éves. Mennyi pénzt kapnak külön-külön, ha a szülők havonta összesen 23 000 Ft-ot adnak a három gyereknek?

8. Egy 100 m^2-es felület burkolását két brigád végzi el. Az egyikben 3 munkás 24 m^2 felületet burkolt le, a másikban 5 munkás 76 m^2-t. Az egész munka 200 ezer Ft-ot ér. Mennyit kapnak az egyes munkások, ha a pénzt a brigádok között
a) a létszámuk arányában;
b) az elvégzett munka arányában osztjuk szét?
Szerintetek melyik elosztás igazságosabb?

9. Egy kenyeret szeretnénk két olyan részre osztani, melyek aránya 2 : 1. A kenyeret 10, 12, 18 vagy 20 szeletre tudják vágni.
a) Melyik szeletelést kérjük, ha a szeletek darabolása nélkül akarjuk a kenyeret elosztani?
b) Melyik szeletelést kérjük, ha célunk minél kevesebb egész szelet elosztása?
c) Milyen legkisebb számú „kenyérszelettel” lehetne megoldani a 2 : 1 arányú elosztást? Oldd meg a feladatot a füzetedben!
Oldd meg az *a)*, *b)* és *c)* feladatokat a füzetedben
d) 3 : 1; *e)* 3 : 2; *f)* 5 : 1 arányú elosztás esetére is!

10. Ossz szét 112 diót
a) 2 : 5; *b)* 1 : 7; *c)* 11 : 3; *d)* 25 : 3 arányban!

3. TÖRTRÉSZ



Ha kaptok 8 barackot és el kell osztanod a testvéreddel, akkor elfelezitek. 4 barack a testvéredé, 4 barack a tied. A 8-at elosztottuk 2-vel, vagy másképp mondva a 8-at megszoroztuk $\frac{1}{2}$-del. A törttel való szorzás azt jelenti, hogy az adott szám törtrészét számítjuk ki. Az $\frac{1}{2}$-del való szorzás az $\frac{1}{2}$ részt jelenti.

1. példa

Matyi 10 fociskártyájának $\frac{3}{5}$ részén van magyar futballista.

a) Hány kártyán van magyar játékos? *b)* Hány kártyán van külföldi játékos?

Megoldás

Most az 10 kártya jelent 1 egészet.

Ennek az $\frac{1}{5}$ része: $10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ kártya. A $\frac{3}{5}$ rész ennek a 3-szorosa: $2 \cdot 3 = 6$ kártya.

(A $\frac{3}{5}$ részt természetesen közvetlenül is számolhattuk volna: $10 \cdot \frac{3}{5} = \cancel{10}^{2} \cdot \frac{3}{\cancel{5}_{1}} = 2 \cdot 3 = 6$ kártya.)

Vagyis 6 kártyán látható magyar és 4 kártyán külföldi focista.

Megjegyzés: A külföldi játékosokat ábrázoló kártyák számát a következő módon is megkaphatjuk: Vegyük figyelembe, hogy ha a kártyák $\frac{3}{5}$ részén van magyar játékos, akkor $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ részén van külföldi játékos. Vagyis $10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ kártyán.

2. példa

Anya 20 barackos fánkot készített. Gazsi leült vacsorázni, de meghagyta a fánkok $\frac{3}{4}$-ét. Matyi a megmaradt fánkok harmadát ette meg. Az ez után megmaradt fánkokat apa és anya osztotta el maguk között két egyenlő részre.

a) Hány fánkot evett meg Gazsi?
b) Hány fánkot evett meg Matyi?
c) Hány fánk jutott apának és anyának?

Megoldás

a) 1 egész rész ↓ 20 fánk ↓

$\frac{1}{4}$ rész ↓ $\frac{20}{4} = 5$ fánk ↓

$\frac{3}{4}$ rész $5 \cdot 3 = 15$ fánk

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a 20-at szorozzuk $\frac{3}{4}$-del.

Tehát 5 fánkot evett meg Gazsi és 15 fánk maradt a tányéron.

b) Matyi a megmaradt 15 fánk harmadát ette meg, ez $15 : 3 = 5$.

Számolhattuk volna úgy is, hogy $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$.

Ha a kezdeti 20 fánkból indulunk ki, akkor így is számolhatunk: $20 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 5$.

Tehát Matyi is 5 fánkot evett meg.

c) Anya és apa a maradék 10 fánkot felezte el, tehát ők is 5-5 fánkot ettek meg.

Feladatok

1. Mennyi 300-nak az

a) $\frac{1}{3}$ része; *b)* harmada; *c)* $\frac{2}{7}$-szerese; *d)* $\frac{1}{3}$-a?

2. Mennyi a 600-nak a

a) $\frac{2}{3}$ része; *b)* $\frac{3}{5}$ része; *c)* $\frac{9}{10}$ része; *d)* $\frac{7}{300}$ része?

3. Mennyi a 900-nak az

a) $\frac{1}{10}$-szerese; *b)* $\frac{4}{10}$-szerese; *c)* $\frac{7}{10}$-szerese; *d)* $\frac{12}{10}$-szerese?

4. Írd fel szorzat alakban és számold ki!

a) 2-nek az $\frac{1}{2}$ része; *b)* 8-nak a $\frac{3}{4}$ része; *c)* $\frac{3}{4}$-nek az $\frac{1}{3}$ része; *d)* $\frac{1}{4}$-nek a $\frac{2}{7}$ része.

5. Petiék megtették a 35 kilométeres út $\frac{80}{100}$ részét, amikor eleredt az eső, és aztán egész úton esett.

a) Az út hányad részét tették meg esőben?
b) Hány kilométert tettek meg esőben?

6. Az autóra felvett 1 400 000 forint kamatmentes családi kölcsön $\frac{4}{7}$ részét már visszafizettük.

a) Hány forintot fizettünk vissza?
b) Hány forint tartozásunk van még?

7. Melyik nagyobb

a) $\frac{3}{5}$-nek az $\frac{5}{3}$ része, vagy $\frac{5}{3}$-nak a $\frac{3}{5}$ része;

b) $\frac{4}{3}$-nak a $\frac{3}{4}$ része vagy $\frac{3}{4}$-nek a $\frac{4}{3}$ része;

c) $\frac{13}{7}$-nek az $\frac{7}{15}$ része vagy $\frac{7}{15}$-nek a $\frac{13}{7}$ része;

d) $\frac{3}{11}$-nek a $\frac{3}{4}$ része vagy $\frac{3}{4}$-nek a $\frac{3}{11}$ része?

8. Számítsd ki 3000

a) $\frac{9}{20}$ részének a $\frac{2}{3}$ részét; *b)* $\frac{4}{5}$ részének a $\frac{3}{8}$ részét; *c)* $\frac{3}{5}$ részének az $\frac{1}{2}$ részét!

9. Számítsd ki 1000-nek

a) az $\frac{1}{100}$ részét; *b)* a $\frac{12}{100}$ részét; *c)* a $\frac{25}{100}$ részét; *d)* a $\frac{120}{100}$ részét!

10. Számítsd ki 100-nak

a) az $\frac{1}{5}$ és a $\frac{4}{5}$ részét; *b)* az $\frac{1}{4}$ és a $\frac{3}{5}$ részét; *c)* a $\frac{7}{10}$ és a $\frac{3}{10}$ részét;

d) a $\frac{3}{5}$ és a $\frac{2}{5}$ részét; *e)* a $\frac{13}{20}$ és a $\frac{7}{20}$ részét; *f)* a $\frac{87}{100}$ és a $\frac{13}{100}$ részét!

11. Zénó az első héten elolvasta egy 350 oldalas könyv $\frac{2}{7}$ részét, a második héten pedig a $\frac{2}{5}$ részét.

a) Hány oldalt olvasott az első héten?
b) Hány oldalt olvasott a második héten?
c) A könyv hányad részét olvasta el az első két hét alatt?
d) Hányad részét kell még elolvasnia a könyvnek?

A mindennapokban gyakran használjuk az arányos szót. Az arányosnak gondolt tárgyakat, alkotásokat, élőlényeket szépnek látjuk, de ilyenkor nem feltétlenül tudjuk megfogalmazni, hogy mire is gondolunk.

Az arány, mint matematikai fogalom, két mennyiség közti kapcsolatot jelent, ami nagyon sokféle lehet.

- Ha 1 perc alatt 100 métert sétálunk, akkor úgy gondoljuk, hogy ugyanilyen tempóban haladva 2 perc alatt 200 métert, 3 perc alatt 300 métert fogunk haladni.
- Ha 1 füzet 70 forintba kerül, akkor két ilyen füzetért 140 forintot, háromért 210 forintot fogunk fizetni.

A továbbiakban ezekhez hasonló arányosságokkal fogunk foglalkozni.

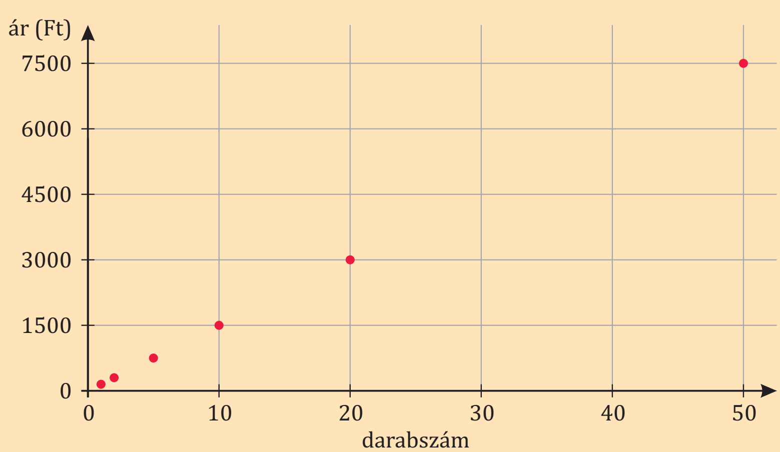
1. példa

Az iskolai automatában az Óriás Túró Rudi 150 forintba kerül. Mennyibe kerül 2, 5, 10, 20, 50 Óriás Túró Rudi? Ábrázoljuk grafikonon a darabszámot és az árat!

Megoldás

Amennyi Óriás Túró Rudit szeretnénk venni az automatából, annyiszor 150 forintra lesz szükségünk.
Vagyis: ár = darabszám · 150.
Foglaljuk táblázatba az összetartozó értékeket!

darabszám	1	2	5	10	20	50
ár	150	300	750	1500	3000	7500



A táblázat számpárjainak közös tulajdonsága, hogy ha az árat elosztjuk a darabszámmal, akkor mindig 150-et kapunk: $\frac{150}{1} = \frac{300}{2} = \frac{750}{5} = \frac{1500}{10} = \frac{3000}{20} = \frac{7500}{50} = 150.$

Ez ugyanazt jelenti, minthogy ahányszorosra változik a darabszám, ugyanannyiszorosra változik az ár. Azt mondjuk, hogy a két mennyiség között **egyenes arányosság** van.

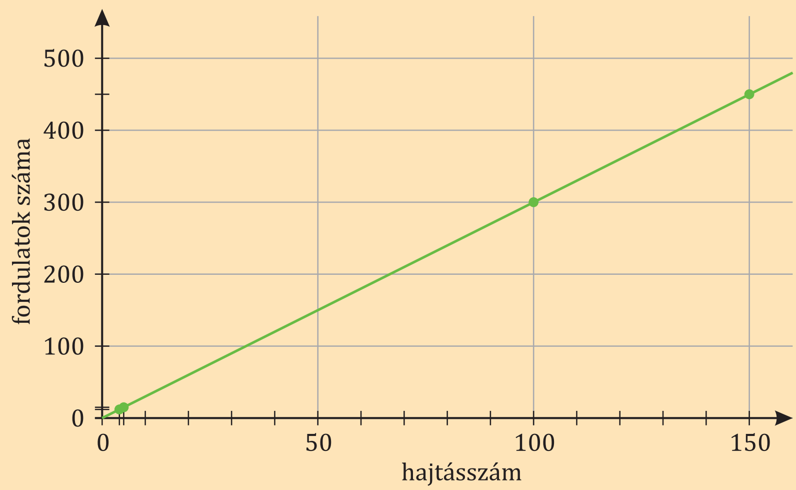
2. példa

Egy bicikli kereke egy hajtás alatt hármat fordul. Mennyit fordul $4, 5, 100, 150, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ hajtás után?

Ábrázoljuk grafikonon a kapott számpárokat!

Megoldás

hajtásszám	4	5	100	150	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
fordulatszám	12	15	300	450	1,5	4,5



Az előző példától eltérően itt össze lehet kötni a pontokat, hiszen nem csak egész számú fordulatot tehet a bicikli pedálja.

A táblázat számpárjainak most is közös tulajdonsága, hogy ha az alsót elosztjuk a felső számmal, akkor állandó értéket kapunk. Ez a szám most 3.

Úgy is mondhattuk volna, hogy ahányszorosra változik a hajtásszám, annyiszorosra változik a fordulatszám.

Egyenes arányosságról akkor beszélünk, ha az összetartozó értékek közül az egyik valahányszorosára változik, akkor ugyanannyiszorosára változik a másik.

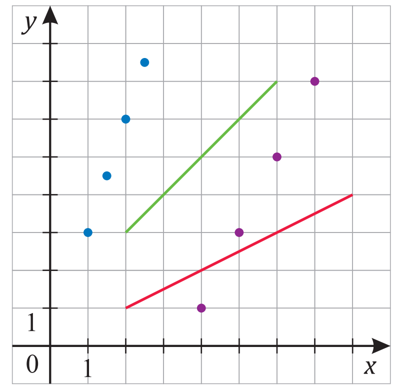
Ha két mennyiség egyenesen arányos, akkor a (0; 0) számpár kivételével az összetartozó értékek hányadosa állandó.

Feladatok

1. Véleményed szerint az alábbi mennyiségek közül melyek állnak egyenes arányban egymással?

a) egy ember életkora – tömege;
b) év eleje óta eltelt napok – hetek száma;
c) telefonbeszélgetés hossza – fizetendő összeg;
d) hátizsák tömege – benne lévő füzetek, könyvek száma;
e) életkor – lábméret.

2. Döntsd el, hogy az ábrán látható grafikonok közül melyik mutat egyenes arányosságot a két mennyiség között!



3. Egy Túró Rudi tömege 31 gramm. Mennyi a tömege a hat és a tíz darabos kiszerelésnek?

4. Egy befőzés alkalmával 30 kg szilvából 18 üveg szilvalekvár készült.
a) Hány üveg lekvár készülne 5, 10, 15, 20, 60 kg szilvából?
b) Hány kg szilva szükséges 6, 12, 24, 36, 72 üveg szilvalekvár készítéséhez?

5. Másfél üveg szilvalekvár egy tepsi flódni (töltött sütemény) elkészítéséhez elegendő. Mennyit használ el anya két, illetve három tepsi süteményhez?

6. Az építkezésen keletkezett hulladék elszállítására teherautókat rendelnek. Nyolc teherautóval 14 tonnát lehet elszállítani.
a) Hány teherautót rendeljenek 21 tonna hulladék elszállításra?
b) Mennyi hulladék szállítására képes 30 teherautó?
c) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat 8 teherautóig! Előtte készíts táblázatot!

7. *a)* Az itt látható táblázatot készítsd el a füzetedben, és írd be a hiányzó értékeket!

a négyzet oldalának hossza (cm)	1	1,5	2	3	4
a négyzet kerülete (cm)					

b) A két mennyiség között egyenes arányosság van?
c) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!

8. Péternek és Pálnak összesen 14 darab 100 forintos pénzérméje van.
a) Hány darab érméjük lehet külön-külön? Készíts táblázatot!
b) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!
c) Egyenes arányosságról van szó ebben a feladatban? Véleményedet indokold!

9. A matematikatanár 10 tanulóval dolgozatot íratott. Délután 4-kor kezdte a dolgozatok javítását, és fél öt után hat perccel háromnak a javításával végzett. Azt feltételezzük, hogy mindegyiket ugyanannyi ideig javítja. Ezt figyelembe véve válaszolj a kérdésekre!
a) Mennyi ideig javít 1 dolgozatot?
b) Készíts táblázatot a dolgozatok számáról és a javításukra felhasznált percekről!
c) Milyen összefüggés van ezen mennyiségek között?
d) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!
e) Mikor fog végezni a matematikatanár a dolgozatok javításával?

10. Az iskola igazgatójának minden tanuló év végi bizonyítványát alá kell írnia. Mivel egy-egy osztály bizonyítványát a megfelelő oldalon kinyitva teszik az osztályfőnökök az asztalára, ezért 1 perc alatt 12 bizonyítványt tud aláírni. Készíts egy olyan ábrát, amelyik jól szemlélteti egy 480 fős iskola esetén az aláírt bizonyítványok számát és az aláírásokra fordított időt!

1. példa

Egy biciklis táborból a gyerekek reggel 8-kor két csoportban indultak el. A gyorsabb csapat másfél óra alatt átlagosan 36 kilométert, a lassabb csapat pedig 2 óra alatt 32 kilométert halad. Az aznapra kitűzött távolság 96 km.

a) Mennyivel hamarabb ér a következő táborhelyre a gyorsabb csapat?

b) Szemléltessük grafikonon a két csapat útját!

Megoldás

a) A gyorsabb csapat fél óra alatt 12 kilométert tesz meg. A következő táborhelyig 96 km-t, azaz ennek a 8-szorosát kell megtenniük. Ehhez 4 órára van szükségük.

Az előző gondolatmenetet szemlélteti az arányos következtetések ilyen elrendezése:

idő (h)		út (km)	
1,5		36	
	$\downarrow$: 3		$\downarrow$: 3
0,5		12	
	$\downarrow$ · 8		$\downarrow$ · 8
4		96	

A lassabb csapat adatait is hasonlóan rendezzük:

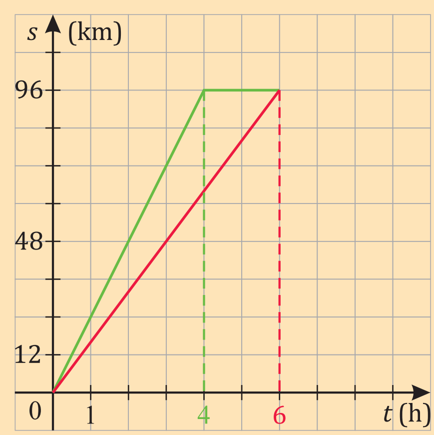
idő (h)		út (km)	
2		32	
	$\downarrow$ · 3		$\downarrow$ · 3
6		96	

Nekik 6 órára van szükségük.

A két időtartam különbsége: 6 – 4 = 2 (h). Tehát 2 órával hamarabb ér oda a gyorsabb csapat a következő táborhelyre.

b) A vízszintes tengelyen az indulástól eltelt időt látjuk, a függőleges tengelyen pedig a megtett utat.

A két függőleges egyenes között látható az az időintervallum, amikor a gyorsabb csapat várta a többieket.



2. példa

Bugárország fizetőeszköze a gubacs és a gubó. Egy gubacs száz gubót ér. Panni pénzt szeretne váltani, mielőtt átlépi az országhatárt, ahol a következő tábla van kifüggesztve:

a) Hány gubót vásárolhat Panni 15 forintért?

b) Minimum hány forintot váltson, ha Bugárországban 60 gubacs és 20 gubó értékben szeretne majd vásárolni?

c) Visszafelé jövet maradt nála 15 gubacs. Hány forintot veszít a visszaváltásnál?

Megoldás

a) Egy gubó ára a gubacs árának századrésze, azaz 2,5 forint.
Mivel 15 : 2,5 = 6, ezért 6 gubót vásárolhat Panni 15 forintért.
b) A 60 gubacsért 60 · 250 forintot, azaz 15 000 forintot,
a 20 gubóért 20 · 2,5 forintot, azaz 50 forintot kell fizetnie.
Összesen minimum 15 050 forintot kell beváltania.
c) Tehát egy gubacs visszaváltásánál 30 forintot veszít, 15 gubacsnál pedig 30 · 15, azaz 450 forintot veszít a visszaváltásnál.

Feladatok

1. 100 forint 4 petákot, illetve 400 fabatkát ér. Hány fabatkát ér egy peták?
Hány forintot ér
a) 25 peták és 5 fabatka; *b)* 100 peták és 2 fabatka; *c)* 844 fabatka?

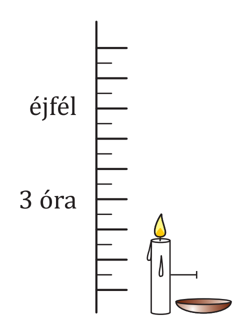
Hány petákot (és ha kell, fabatkát) ér
d) 1012 forint; *e)* 10 112 forint; *f)* 537 forint?

2. Egy cukrászdában 8 adag vaníliasodó elkészítéséhez 6 tojást használnak fel. Hány adag sodó készül
a) 3; *b)* 18; *c)* 36; *d)* 60 tojásból?

Hány tojást használnak
e) 4; *f)* 16; *g)* 24; *h)* 56 adag sodó készítéséhez?

3. Az óra nagymutatója egy óra alatt 360 fokot fordul.
a) Ábrázold koordináta-rendszerben az eltelt percek és az elfordulás fokokban mért szögét!
b) Hány fokot fordul a nagymutató 5, 25, 100 perc alatt?
c) Mennyi idő telik el 90, 30, 10 fokos fordulat alatt?

4. A középkori kolostorokban az éjszaka múlását gyertyaórával mérték, kihasználva, hogy egy egyenletesen égő gyertyából azonos idő alatt azonos magasságú viaszoszlop olvad le.
A gyertyaóra alkalmas időzítésre is, akár egy ébresztőóra. Mindössze egy szöget kell a gyertyába szúrni abban a magasságban, ahol a gyertya égni fog a kívánt időpontban, és egy fémtálat aláhelyezni. Így amikor a gyertya a szögig leég, vagyis a „beállított” időpontban a szög kiolvad, nagy csattanással a tálkába esik, jelezve, hogy ideje felkelni.
Mikor „ébreszt” a képen látható gyertyaóra? (PISA 2009. 36. feladata: gyertya)



5. Gondolkozz! Ha egy ló egy nap alatt egy kupac abrakot fogyaszt el, akkor hét ló hét nap alatt hány kupac abrakot eszik meg?

6. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

A víz és az emberi szervezet

A kisgyerekek szervezetének víztartalma magasabb 75%-nál, míg a felnőtteké 60-70%. A kiszáradás fejfájást, fáradékonyságot okoz, és vele jár a teljesítmény romlása is. Az elvesztett vízmennyiséget feltétlenül pótolnunk kell.

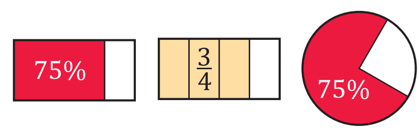
Százalékszámítással már a Kr. e. 300-as évekből származó babiloni leleteken is találkoztunk, de a mindennapjainknak is szerves része. Az árváltozásokat, a kamatokat, az adókat százalékban fejezik ki: 20 százalékos árleszállítás, 8 százalékos kamat, 15 százalékos adó stb.

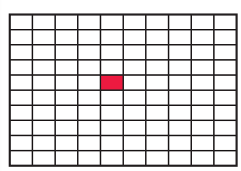
A mindennapi életben gyakran hasonlítunk össze mennyiségeket nem a nagyságuk, hanem az egymáshoz viszonyított arányuk alapján. A százalékkal is mennyiségek arányát fejezzük ki.

A százalék jele: %. **1 egész = 100%.**
Írásban így jelenik meg: 20%, 8%, 10%.

Az 1 egésznek az $\frac{1}{5}$ része $= 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}2$, vagyis $100\% \cdot \frac{1}{5} = 20\%$.

Az 1 egésznek a $\frac{3}{4}$ része $= \frac{75}{100} = 0{,}75 = 75\%$.





Egy szám 1%-a, vagyis századrésze, $\frac{1}{100}$ része ugyanazt jelenti, mint az $\frac{1}{100}$-szorosa.

1. példa

A 30 fős 6. b osztály tanulóinak 20%-a színjátszó szakkörre jár. Hányan járnak az osztályból a szakkörre?

Megoldás

I. módszer, következtetés 1%-ra

30 fő 100%	30-nak az 1%-a, 1%	30-nak a 20%-a, 20%
30	$\frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{30}{100} \cdot 20 = \frac{3}{10} \cdot 20 = 0{,}3 \cdot 20 = 6$

II. módszer, törtrész segítségével

Más módon is számolhattunk volna. 20% a $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ rész, azaz a 30 gyerek $\frac{1}{5}$-e, $30 \cdot \frac{1}{5} = 6$. Az osztályból 6-an járnak színjátszó szakkörre.

2. példa

Egy állatkertben zsiráffiú született. Megkérdezték az interneten az embereket, milyen nevet adjanak az újszülöttnek. A felhívásra 25 000 e-mail érkezett. A sok levél miatt csak a 2%-át dolgozták fel az üzenetekből. Hány levelet olvastak el?

Megoldás

I. módszer:

100%	1%	2%
25 000	$25\,000 \cdot \frac{1}{100} = 250$ vagy $25\,000 \cdot 0{,}01 = 250$	$25\,000 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2 = 250 \cdot 2 = 500$ vagy $25\,000 \cdot 0{,}02 = 250 \cdot 2 = 500$

A 2% az $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ rész, azaz 25 000-nek az $\frac{1}{50}$ része $25\,000 \cdot \frac{1}{50} = 500$.

(Az 500 e-mail alapján Abebének nevezték el a kis zsiráfot.)

Egy szám vagy mennyiség 1%-a az $\frac{1}{100}$ része, azaz $\frac{1}{100} = 0{,}01$-szorosa.

Kiszámítása: Az adott számot vagy mennyiséget elosztjuk 100-zal, vagy megszorozzuk $\frac{1}{100}$-dal.

3. példa

Számítsuk ki 1500-nak a 60%-át!

Megoldás

	100%	1%	60%
közönséges tört alakban	1500	$1500 \cdot \frac{1}{100} = 15$	$1500 \cdot \frac{1}{100} \cdot 60 = 1500 \cdot \frac{60}{100} = 900$
tizedes tört alakban	1500	$1500 \cdot 0{,}01 = 15$	$1500 \cdot 0{,}01 \cdot 60 = 1500 \cdot 0{,}60 = 900$

Egy lépésben:

Az előző két szorzást egyszerre végezzük el, 1500-at megszorozzuk $\frac{1}{100} \cdot 60 = \frac{60}{100}$-dal.

Tehát 1500-nak a 60%-a: $1500 \cdot \frac{60}{100} = 900$.

Egy lépésben tizedes törttel szorozva:

Mivel $\frac{60}{100} = 0{,}6$, ezzel is szorozhatunk: **1500-nak a 60%-a egyenlő $1500 \cdot 0{,}6 = 900$.**

6. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Alap, százalékláb és százalékérték

A 3. példában kiszámítottuk, hogy 1500-nak a 60%-a 900.

A százalékszámításban használunk hagyományos elnevezéseket.

Az 1500 elnevezése **alap**, a 60 a **százalékláb**, a 900 a **százalékérték.**

A százalékértéket úgy kaptuk meg, hogy az alapot megszoroztuk a százalékláb századrészével.

$$\text{alap} \cdot \frac{\text{százalékláb}}{100} = \text{százalékérték}$$

$$1500 \cdot \frac{60}{100} = 900$$

4. példa

Tudjuk, hogy 1 óra = 60 perc, negyedóra 15 perc, fél óra 30 perc, háromnegyed óra 45 perc. Számítsuk ki 60 perc 25%-át, 50%-át, 75%-át és 100%-át!

Megoldás

Most az alap a 60 perc, a százalékláb a 25, az 50, a 75 és a 100. A százalékértéket keressük.

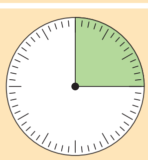
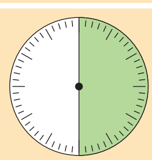
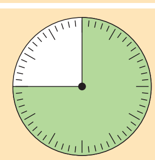
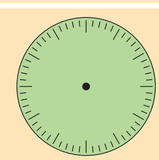
A százalékérték = alap $\cdot \frac{\text{százalékláb}}{100}$ összefüggést használjuk, de felírjuk tizedes tört alakban is.

60-nak a 25%-a egyenlő $60 \cdot \frac{25}{100} = 60 \cdot 0{,}25 = 15$. A 60 perc 25%-a 15 perc = negyedóra.

60-nak az 50%-a egyenlő $60 \cdot \frac{50}{100} = 60 \cdot 0{,}5 = 30$. A 60 perc 50%-a 30 perc = fél óra.

60-nak a 75%-a egyenlő $60 \cdot \frac{75}{100} = 60 \cdot 0{,}75 = 45$. A 60 perc 75%-a 45 perc = háromnegyed óra.

60-nak a 100%-a egyenlő $60 \cdot \frac{100}{100} = 60 \cdot 1 = 60$. Tehát 60 perc 100%-a 60 perc = 1 óra.

			
$25\% = \frac{1}{4}$ (egynegyed)	$50\% = \frac{1}{2}$ (fél)	$75\% = \frac{3}{4}$ (háromnegyed)	100% = 1 (egy egész)

5. példa

Számítsuk ki, hogy 60 percnek mennyi a 150%-a, 200%-a!

Megoldás

60-nak a 150%-a: $60 \cdot \frac{150}{100} = 60 \cdot 1{,}5 = 90$.
60 perc 150%-a 90 perc.
Ez 60-nak a másfélszerese.
150% = 1,5-szeres.

60-nak a 200%-a: $60 \cdot \frac{200}{100} = 60 \cdot 2 = 120$.
60 perc 200%-a 120 perc.
Ez 60-nak a kétszerese.
200% = 2-szeres.

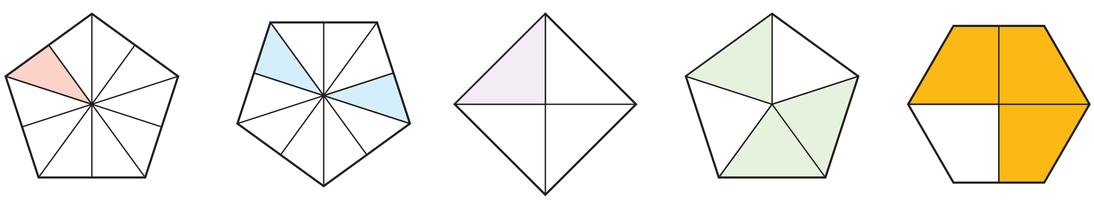
Feladatok

1. Számold ki füzetedben 1000-nek
a) az 1%-át; *b)* a 2%-át; *c)* az 5%-át; *d)* a 10%-át;
e) a 20%-át; *f)* a 25%-át; *g)* a 110%-át; *h)* a 150%-át!

2. Számold ki füzetedben 1500-nak
a) az 1%-át; *b)* a 2%-át; *c)* a 3%-át; *d)* az 5%-át;
e) a 10%-át; *f)* a 100%-át; *g)* a 110%-át; *h)* a 150%-át!

3. Számold ki a füzetedben 240-nek az (a)
a) 5%-át, 10%-át, 12%-át, 20%-át, 60%-át, 80%-át!
b) $\frac{1}{20}$ részét, $\frac{1}{10}$ részét, $\frac{3}{25}$ részét, $\frac{1}{5}$ részét, $\frac{3}{5}$ részét, $\frac{4}{5}$ részét!
c) Írd le az *a)*, illetve a *b)* részben kiszámított egyenlő értékek kapcsolatát $\left(\text{pl. } 25\% = \frac{1}{4} \text{ rész}\right)$!

4. Az alábbi alakzatok hány százaléka színezett és hány százaléka nem színezett?



5. Melyik több és mennyivel?
a) 20 000 Ft 40%-a, vagy 100 000 Ft 10%-a?
b) 100 liter 12%-a, vagy 200 liter 6%-a?
c) 12 km 150%-a, vagy 50 km 20%-a?
d) 20 km 30%-a vagy 4000 m 120%-a?
e) Másfél óra 50%-a, vagy fél óra 150%-a?
f) Egy nap 25%-a, vagy 3 óra 150%-a?

6. Mennyi lesz a fizetése annak a dolgozónak, akinek a 200 ezer Ft-os fizetését 10%-kal növelik? Mekkora a növekedés mértéke?

7. Andrisék családja lakásfelújításra 2 millió Ft kölcsönt vett föl egy évre. Hitelfelvételkor a bankok kamatot számolnak fel. A kamat mértékét százalékban adják meg, jelenleg egy évre 12% kamatot kell fizetni. Mekkora összeget kell visszafizetnie Andris családjának egy év múlva?

8. Zsófi telefonjának kijelzőjén öt függőleges vonal jelzi az akkumulátor teljes töltöttségét. Ha az akkumulátor töltöttsége 80%-ra csökken, az öt vonalból egy eltűnik, ha 60%-ra, akkor még egy, és így tovább. Mekkora lehet az akkumulátor töltöttsége, ha a kijelzőn két vonal látható?

9. Egy televíziós tehetségkutató verseny döntőjében a két együttes közti versenyt közönségszavazatok döntik el. Telefonon és interneten is lehet szavazni. A 62 500 telefonos szavazat 43%-át az Iker Prímek Duó, a 7500 internetes szavazat 22%-át a Kecskerímek Band együttes kapta. Ki nyerte a döntőt?

7. A 100% KISZÁMÍTÁSA

Megoldás következtetéssel, két lépésben:
1. Következtetés az 1%-ra: **a százalékértéket elosztjuk a százaláklábbal.**
2. Következtés a 100%-ra: **az 1%-ra kapott értéket megszorozzuk 100-zal.**

1. példa

Egy iskolában 84 diák tanul zenét. Ez az iskola tanulóinak 12%-a. Számítsuk ki, hogy hányan járnak ebbe az iskolába!

Megoldás

Az ismert adatokból kiszámíthatjuk az iskola tanulóinak 1%-át, majd ebből következtethetünk az egészre, azaz a 100%-ra.

Az iskola tanulóinak 12%-a, azaz $\frac{12}{100}$ része 84 tanuló. $12\% \Rightarrow 84$

Az iskola tanulóinak 1%-a a 84 tanuló $\frac{1}{12}$ része, tehát 84 : 12 = 7 tanuló. $1\% \Rightarrow \frac{84}{12} = 7$

Az iskola tanulóinak száma az 1% 100-szorosa: 700 tanuló. $100\% \Rightarrow 7 \cdot 100 = 700$

$\frac{84}{12} \cdot 100 = 84 \cdot \frac{100}{12} = 700$ tanuló jár az iskolába.

2. példa

Az iskola 6. osztályosainak 32%-a sportol rendszeresen; szám szerint 40 tanuló. Számítsuk ki a 6. évfolyam létszámát!

Megoldás

Az előző feladatban megismert módszert alkalmazzuk: $32\% \Rightarrow 40$

Az évfolyam 1%-ának kiszámítása: 40 : 32 = 1,25. $1\% \Rightarrow \frac{40}{32} = 1{,}25$

Az évfolyam létszáma (100%) ennek százszorosa: 125 tanuló. $100\% \Rightarrow 1{,}25 \cdot 100 = 125$

Az 1%-ra kapott 1,25 tanuló meglepő lehet. Fogadjuk el számolási részeredménynek, melynek nincs valóságos jelentése.

3. példa

Egy autó árát megemelték 20%-kal, így most 3 360 000 Ft-ba kerül. Mennyi volt az ára az áremelés előtt?

Megoldás

A 20%-os áremelés utáni ár az eredeti ár 120%-a, ezért most
a százalékláb: 120,
a százalékérték: 3 360 000 Ft.

$1\% \Rightarrow$ 3 360 000 : 120 = 28 000.
$100\% \Rightarrow$ 28 000 · 100 = 2 800 000.
Az áremelés előtt 2 800 000 Ft-ba került az autó.

4. példa

Egy akciós számítógépet 20%-kal olcsóbban kínálnak. Az ára most 96 000 Ft. Mennyibe került az akció előtt? Mennyivel olcsóbban vehetjük meg?

Megoldás

A 20%-os árcsökkentés utáni ár az eredeti 80%-a, ezért most a százalékláb 80, a százalékérték 96 000 Ft.

80% $\Rightarrow$ 96 000

1% $\Rightarrow$ 96 000 : 80 = 1200.

100% $\Rightarrow$ 1200 · 100 = 120 000.

A számítógép akció előtti ára 120 000 Ft volt.

Akciós vásárlás esetén a megtakarítás 120 000 Ft – 96 000 Ft = 24 000 Ft.

A megtakarítás az eredeti ár 20%-a; 120 000 Ft · 0,2 = 24 000 Ft.

Feladatok

1. Számítsd ki azt a számot, melynek

a) 1%-a 29; *b)* 2%-a 22; *c)* 20%-a 40; *d)* 160%-a 40;
e) 1%-a 100; *f)* 2%-a 75; *g)* 20%-a 95; *h)* 160%-a 88!

2. *a)* Egy nyeregtetős ház tetejére, 24 négyzetméter napkollektort szerelnek, amellyel a teljes tető 30%-át fedték le. Mekkora a tető teljes felülete?

b) A házban lakó család villanyszámlája korábban havi 16 ezer Ft volt. A napkollektor használatával a nyári hónapokban 90%-os csökkenést értek el. Hány Ft-ot takarítanak meg a nyári hónapokban?

3. Egy őstermelő a piaci nap délelőttjén eladta a reggeli őszibarackkészletének 60%-át. Délután a maradék 120 kg is elfogyott. Mennyi őszibarackja volt a nap elején?
Az őstermelő délelőtt kilogrammonként 160 Ft-ot kért, délután 15%-os árengedményt adott.
Mennyi volt az aznapi bevétele?

4. Ingatlan vásárlása esetén szerződéskötéskor 10%-os foglalót szoktak kérni a vevőtől. Nézzetek utána az interneten, hogy mit jelent a foglaló!
A foglaló a vételárba beleszámít. Egy család 7500 eurót fizetett foglalóként egy ház vásárlásánál. Mennyibe került a ház?

5. A 95-ös benzin árát 1,5%-kal csökkentették. Autónk 47 literes benzintankjában már csak 2 liter üzemanyag van, amikor teletankoljuk. Az árcsökkenés miatt 297 Ft-ot takarítottunk meg. Mennyibe került literenként a benzin az árcsökkentés előtt?

6. Mennyi volt Peti édesapjának az éves adóköteles bevétele, ha 16%-os adókulcs esetén 480 000 Ft adót fizetett?

8. HÁNY SZÁZALÉK?

1. példa

Egy 256 GB kapacitású pendrive-on 192 GB adat található.
Hány százaléka ez a teljes kapacitásnak?
Hány százalék a még rendelkezésre álló szabad terület?

Megoldás

1. módszer

Mivel az alap a 100%, az alap századrészét kiszámítva megkapjuk az 1%-ot.
256 : 100 = 2,56.
Kiszámítjuk, hogy a százalékértékben hányszor van meg az 1% értéke: 192 : 2,56 = 75.
A megoldás lépései:

Kiszámítjuk az alap századrészét.		A százalékértékben hányszor van meg az 1%?
100% $\Rightarrow$ 256	1% $\Rightarrow \dfrac{256}{100} = 2{,}56$	192 : 2,56 = 75

A pendrive 75%-a van tele, 100 – 75 = 25. A pendrive 25%-a üres.

2. módszer

A százalék = századrész, ezért kiszámítjuk, hogy a
192 hány századrésze a 256-nak: $\dfrac{192}{256} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 = \dfrac{75}{100}$.

A $\dfrac{75}{100}$ százalékban kifejezve 75%. A pendrive kapacitásának 75%-a foglalt; a szabad terület 25%.

A megoldás lépései:

Megállapítjuk, hogy melyik érték az alap, és melyik a százalékérték.	Kiszámítjuk a százalékérték és az alap arányát (hányadosát).	Az így kapott értéket megszorozzuk 100-zal.
Alap: 256 = 100% Százalékérték: 192	$\dfrac{192}{256} = 0{,}75 \Rightarrow 75\%$	$0{,}75 \cdot 100 = 75$ 0,75 rész $\Rightarrow$ 75%
A két utóbbi lépés összevonható:		
	A százalékérték és az alap hányadosát megszorozzuk 100-zal.	
	$\dfrac{192}{256} \cdot 100 = 0{,}75 \cdot 100 = 75\%$	

2. példa

Egy vevőnek sikerült 2 400 000 Ft-ra lealkudnia egy 3 000 000 Ft-os áron meghirdetett autót.

a) A meghirdetett ár hány százaléka az engedmény?
b) A vételi ár hány százaléka az engedmény?

Megoldás

Mindkét esetben a százaléklábat keressük.
Az engedmény mértéke: 3 000 000 Ft – 2 400 000 Ft = 600 000 Ft. Ez a százalékérték.
Az *a)* esetben az alap az autó meghirdetett ára: 3 000 000 Ft.
A százalékérték és az alap hányadosa: $\frac{600\,000}{3\,000\,000} = 0{,}2$.
0,2 rész az 20%.

A *b)* esetben az alap a vételár: 2 400 000 Ft.
$\frac{600\,000}{2\,400\,000} = 0{,}25$, azaz 0,25 rész az 25%.
Az engedmény a meghirdetett árnak 20%-a, a vételárnak 25%-a.

Feladatok

1. Hányszorosa, illetve hány százaléka a
a) 24 a 48-nak; *b)* 12 a 24-nek; *c)* a 12 a 48-nak; *d)* 24 a 12-nek;
e) 10 a 20-nak; *f)* 10 az 50-nek; *g)* a 10 a 100-nak; *h)* 10 a 4-nek?

2. Hányszorosa, illetve hány százaléka a
a) 24-nek a 48; *b)* 12-nek a 24; *c)* a 12-nek a 48; *d)* 24-nek a 12?

3. „A 3000 megvizsgált háztartás közül 1320-ban volt autó” – olvashattuk egy statisztikában. A vizsgált háztartások hány százaléka ez?

4. Hányadrésze és hány százaléka a
a) 24 a 72-nek; *b)* 85-nek a 17; *c)* 5 a 42-nek; *d)* 2534-nek az 52;
e) 24 óra az egy hétnek; *f)* 50 gramm a 2,5 kg-nak; *g)* 20 perc a 30 másodpercnek?

5. Egy cipőbolt tél végi akcióját reklámozó szóróanyagon látható: Hány százalékos volt a leárazás?

6. Két egymást követő árváltozás során egy 2000 Ft-os könyv árát először 1600 Ft-ra csökkentették, később felemelték ismét 2000 Ft-ra. Hány százalékos volt az árcsökkentés és hány százalékos az áremelés?

7. Egy 440 km-es autós utazásból eddig 176 km-t tettünk meg. Az út hány százaléka van még hátra?

8. Matyi a 140 pontos dolgozatot 119 pontra írta. Jelest a 80% fölöttiek kaptak, és a 90 százalék fölöttieket külön kiemelte és megdicsérte a tanáruk. Milyen értékelést kapott Matyi?

9. A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS GYAKORLÁSA

A százalékszámítás fogalmai és összefüggései

Százalék: valamely mennyiség meghatározott számú századrésze, a jele %.

fogalom	kiszámítása
Százalékérték: az alap valahány százaléka, a százalékban megadott mennyiség számmal kifejezett értéke.	$\text{százalékérték} = \text{alap} \cdot \frac{\text{százalékláb}}{100}$
Százalékalap: az a mennyiség, amelynek valahány százalékát akarjuk kiszámítani.	$\text{alap} = 100 \cdot \frac{\text{százalékérték}}{\text{százalékláb}}$
Százalékláb: az a szám, amely kifejezi, hogy az adott mennyiségnek hány százalékát számítjuk ki.	$\text{százalékláb} = 100 \cdot \frac{\text{százalékérték}}{\text{alap}}$

A százalékszámításnál háromféle értéket kereshetünk

1. A **százalékértéket:**
Mennyi 250-nek a 15%-a?

250-nek a 15%-a **37,5**.

alap: 100%	1%	**százalékérték:** 15%
250	$\frac{250}{100} = 2{,}5$ $250 : 100 = 2{,}5$	$\frac{250}{100} \cdot 15 = 2{,}5 \cdot 15 = \mathbf{37{,}5}$ $250 : 100 \cdot 15 = 2{,}5 \cdot 15 = \mathbf{37{,}5}$ $250 : 100 \cdot 15 = 250 \cdot 0{,}15 = \mathbf{37{,}5}$ $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, 250-nek a $\frac{3}{20}$ része $250 \cdot \frac{3}{20} = \mathbf{37{,}5}$.

2. Az **alapot:**
Melyik szám 20%-a a 90?

450-nek a 20%-a 90.

százalékláb: 20%	1%	**alap:** 100%
százalékérték: 90	$\frac{90}{20} = 4{,}5$ $90 : 20 = 4{,}5$	$\frac{90}{20} \cdot 100 = 4{,}5 \cdot 100 = \mathbf{450}$ $90 : 20 \cdot 100 = 4{,}5 \cdot 100 = \mathbf{450}$ 20% az $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ rész. Ha 90 az $\frac{1}{5}$ rész, akkor az egész $90 \cdot 5 = \mathbf{450}$.

3. A **százaléklábat:**
Hány százaléka 60 az 500-nak?

500-nak a **12%**-a a 60.

alap: 100%	1%	**százalékláb:** 60 : 5 = **12%**
500	$\frac{500}{100} = 5$ $500 : 100 = 5$	százalékérték: 60 $\frac{60}{500} = \frac{12}{100} = 0{,}12$, az **12%**.

1. példa

Egy dromedár (egypúpú teve) testsúlyának akár 40 százalékát is elveszítheti anélkül, hogy maradandó károsodást szenvedne. Számítsuk ki, hogy egy 500 kg tömegű dromedár esetében hány kg-ot jelent ez! Hány százalékot hízik, ha ezt a súlyveszteséget visszaszedi?

Megoldás

Az 500 kg 40%-a: $500 \cdot 0{,}4 = 200$ kg.
Ekkor lefogy: 500 kg – 200 kg = 300 kg-ra.
A lefogyott 300 kg-os tömegének a visszaszedett 200 kg a $\frac{200}{300} \cdot 100 \approx 67\%$-a.

2. példa

Andrásék közelében található egy kis élelmiszerbolt és egy nagy bevásárlóközpont. András pontos kimutatást vezet a két bolt árairól. A tej literje a kisboltban 200 Ft, a nagy boltban 15%-kal olcsóbb. A kenyér kilója a kisboltban 250 Ft, a nagyban 20%-kal több. A krumpli a kisboltban 300 Ft, a nagyban 10%-kal olcsóbb.
András bevásárlólistáján 2 kg kenyér, 3 liter tej és 5 kg krumpli szerepel.
Ha az összes árut egy helyen veszi meg, akkor mennyit fizetne az egyik, illetve a másik helyen?
Hány százalékos a megtakarítása, ha ott vásárol, ahol kisebb a végszámla?

Megoldás

András egy táblázatot készített:

Áru	Egységár a kisboltban	egységár a nagy boltban
Tej	200 Ft	15%-kal olcsóbb, tehát a 200 Ft 85%-a: 200 Ft · 0,85 = 170 Ft
Kenyér	250 Ft	20%-kal több, tehát a 250 Ft 120%-a: 250Ft · 1,2 = 300 Ft
Krumpli	300 Ft	10%-kal olcsóbb, tehát a 300 Ft 90%-a: 300 Ft · 0,9 = 270 Ft

	A kisboltban	A nagy boltban
3 liter tej	3 · 200Ft = 600 Ft	3 · 170 Ft = 510 Ft
2 kg kenyér	2 · 250 Ft = 500 Ft	2 · 300 Ft = 600 Ft
5 kg krumpli	5 · 300 Ft = 1500 Ft	5 · 270 Ft = 1350 Ft
Összesen:	2600 Ft	2460 Ft

Feladat

Számítsd ki a füzetedben, hogy mennyit takarít meg András akkor, ha mindkét boltot felkeresi, és minden egyes árucikket ott vásárol meg, ahol az olcsóbb!

Az adott bevásárlólistán lévő áruk esetén a nagy boltban olcsóbban vásárolhatunk. A megtakarítás:
2600 Ft – 2460 Ft = 140 Ft.
Ennek százalékos aránya a drágább bolthoz képest: $\frac{140}{2600} \cdot 100 = 5{,}3\%$.

Feladatok

1. Szezonvégi kiárusítás alkalmával egy 24 000 Ft-os telefon árát 20%-kal csökkentették. Mennyiért lehet megkapni most?

2. Andris a százalékszámítás-dolgozatra készül. Megoldotta a feladatgyűjtemény összes idevágó példáját. A végeredmények ellenőrzésekor megállapította, hogy a feladatok 80%-át, szám szerint 32 darabot helyesen oldott meg. Hány feladatot oldott meg András?

3. Egy 50 000 Ft-os termék árát kedden 20%-kal megemelték. Csütörtökön újabb árváltozás történt: 20%-os leárazás. Számítsuk ki a termék pénteki árát! Számítsuk ki a pénteki árat akkor is, ha a két 20%-os árváltozás fordított sorrendű, először történik a leárazás, azután az emelés!

4. Egy kifutó árucikkeket forgalmazó áruház 50%-os árengedményt hirdetett meg egy eredetileg 6000 Ft-os termékre. A termék az akció ellenére nem fogyott elég gyorsan, ezért az új árból még 50%-ot engedtek. Ennek hatására már gyorsan elfogyott a készlet.
a) Mennyibe került a termék az első és a második akció után?
b) Mekkora árengedménnyel lehetett volna egy lépésben elérni a végső árat?

5. Ha Magyarországon megvásárolsz valamit, akkor annak árában adót is fizetsz. Ez az áfa (általános forgalmi adó), ami általában 27%. Ez azt jelenti, hogy ha valaki előállít egy 100 forint árú terméket, akkor ahhoz 27 forint áfa társul, azaz 127 forintért adja el. Vannak kedvezményes termékek, ilyen például a könyv, amikor az áfa csak 5%.
a) Számítsd ki, hogy mennyi áfát fizetsz, ha megvásárolod a következő könyveket:

Szerző	Cím	Ár (Ft)
Berg Judit	Rumini	2520
J. K. Rowling	Harry Potter és a bölcsek köve	2940
Jeff Kinney	Egy ropi naplója	2100
Rick Riordan:	Percy Jackson és az olimposziak 1. A villámtolvaj	3045
Arany János	Toldi, Toldi szerelme, Toldi estéje	1470

b) Számítsd ki, hogy mennyi áfát fizetsz, ha megvásárolod a következő termékeket. Ahol szükséges, ott kerekíts!
i) 1 kifli 18 Ft; *ii)* 1 kg kenyér 210 Ft; *iii)* tévé 119 000 Ft;
iv) autó 3 995 000 Ft; *v)* lakás 16 400 000 Ft

6. Egy erdőben 2017-ben 10 000 fa van, és minden évben 5%-kal nő az erdőben lévő fák száma.
a) Hány fa lesz az erdőben egy év múlva, 2018-ban?
b) Hány fa lesz az erdőben újabb egy év múlva, 2019-ben?
c) Hány fát vághat ki az erdészet 2020-ban, ha az erdő 12%-nak a kivágására kaptak engedélyt?

7. *a)* A benzin ára fél év alatt 395 forintról 316 forintra csökkent. Hány százalékos az árcsökkenés?
b) A benzin ára fél év alatt 316 forintról 395 forintra nőtt. Hány százalékos az ánövekedés?

8. Százalékszámításból írt dolgozatát osztotta ki a tanár a 6. a osztálynak, és azt mondta: „Gyerekek, ez pocsékul sikerült. Az osztály 37%-ának egyes lett a dolgozata."
Csongi erre hátulról közbekiabált: „Nem is vagyunk annyian az osztályban!" Miután kinevetgélték magukat, alapos ismétlésbe kezdtek. Hányan lehettek az osztályban és hány tanuló dolgozata lett egyes, ha a dolgozatok 37%-a lett egyes? Az érték egy tizedesjegyre kerekített, és az osztályban 20-nál több, de 30-nál kevesebb tanuló volt.

9. A 6. b-ben az irodalomórán is lehetett derülni. A tanáruk éppen arról mesélt, hogy egy statisztika szerint a 14 éves fiúk 59%-a és a lányok 41%-a heti egy óránál kevesebbet olvas, amikor Csongi közbekotyogott. „Jé! Ez éppen 100%. Akkor egyetlen gyerek sem olvas heti egy óránál többet!" Szegény Csongit már megint kinevették a többiek. Miért?

10. Tegyük fel, hogy az osztályod minden tanulója válaszol az alábbi kérdésekre:
Az osztálytársaid hány százaléka
a) szemüveges *b)* lány *c)* szemüveges fiú?
Hányféle helyes válasz születhet az egyes kérdésekre? Melyek ezek, és kik adják?
Elképzelhető olyan osztály, ahol az *a)* kérdésre mindenki ugyanazt a helyes választ adja?
Ha igen, akkor hogyan?

11. Ha tiszta vízbe sót keverünk, akkor a kapott sós víz töménysége az oldott só tömegének és a sós víz tömegének százalékban megadott aránya. Határozd meg a táblázat hiányzó adatait! Vedd figyelembe, hogy 1 liter víz tömege 1 kg. Dolgozz a füzetedben!

Oldott só tömege (kg)	0,15	0,2			0,3	0,2
Tiszta víz mennyisége (liter)	0,85			3	5,7	
Sós víz tömege (kg)	1		50			3,6
Töménység (%)	15	20	15	25		

12. Egy konzervgyárban adagolóautomata tölti a csokoládékrémes dobozokat. Az automata által adagolt anyag mennyisége ingadozik. A dobozon feltüntetett névleges értéktől vett 2%-os eltérés mindkét irányban megengedhető. Milyen határok között változik egy 400 grammos csokoládékrémes doboz tartalmának tömege?

13. A tejszín tömegének 62%-a vaj. Hány kg tejszínből készíthető 1 kg vaj?

14. Egy illatszerbolt akciós kuponja a következő kedvezményt ajánlja: „Ha a kupon felmutatója két terméket vásárol, akkor az olcsóbbik árából 20%, a drágábbikéból 40% kedvezményt kap". Vince édesanyja egy 850 Ft-os sampont, és egy 2200 Ft-os hajfestéket vásárol. Megkéri Vincét, hogy számítsa ki a kuponnal elérhető megtakarítás nagyságát. A helyesen kiszámított eredmény jutalmaként felajánlja, hogy a megtakarítás 40%-ával növeli Vince havi zsebpénzét. Vince természetesen jól számította ki a megtakarítás nagyságát. Mennyi lett Vince zsebpénz-kiegészítése?

1. példa

a) Apa 38 éves és anya 2 évvel fiatalabb. Hány éves anya?
b) Apa n éves és anya 2 évvel fiatalabb. Írjuk fel anya életkorát n segítségével!

Megoldás

a) Anya $38 - 2 = 36$ éves. *b)* Anya $n - 2$ éves.

2. példa

a) Nekem 1200 Ft-om van, a nővéremnek pedig háromszor annyi. Hány forintunk van összesen?
b) Nekem x Ft-om van, a nővéremnek pedig háromszor annyi. Írjuk fel x segítségével, hány forintunk van összesen!

Megoldás

a) $1200 + 3 \cdot 1200 = 1200 + 3600 = 4800$ forintunk van összesen.
b) $x + 3 \cdot x = 4x$ Ft-unk van összesen.

3. példa

Egy taxitársaság tarifái a képen láthatók:

a) Mennyit fizet az az utas, aki a Liszt Ferenc repülőtérről megy a Kálvin térre, amely egy 20 km-es út?

b) Mennyit fizet az az utas, aki 8-ra rendelt taxit, de csak 8:10-kor ül be a pontosan érkezett taxiba, amivel 11 kilométeres utat tesz meg?

c) Mennyit fizet az utas, akire v percet vár a taxi, aztán s km-t tesz meg?

Megoldás

a) Alapdíjat és 20 km-re útdíjat kell fizetnie, ez összesen $450 + 20 \cdot 280 = 450 + 5600 = 6050$ Ft.

b) $10 \cdot 70 + 450 + 11 \cdot 280 = 700 + 450 + 3080 = 4230$ Ft

c) $v \cdot 70 + 450 + s \cdot 280$ forintot kell fizetnie az utasnak.

Azokat a kifejezéseket, amelyekben számokat és betűket köt össze a négy alapművelet, algebrai kifejezéseknek nevezzük.

Például: $38 - 2$; $x + 2$; $v \cdot 70 + 450 + s \cdot 280$; $x + 3 \cdot x$; $x \cdot x \cdot x + 2$; $y : 3 - y$; $a + b + c$; …

Feladatok

1. Írd fel algebrai kifejezésekkel!

a) Egy szám fele.
b) Egy számnál 4-gyel kevesebb.
c) Egy szám háromszorosánál eggyel kevesebb.
d) Egy szám háromszorosának a hatoda.

2. Írd fel szavakkal!

a) $x + 2$; *b)* $3 \cdot x$; *c)* $x - 5$; *d)* $(x + 2) \cdot 3$; *e)* $3 \cdot x + 2$; *f)* $(x - 5) : 11$.

3. Írd fel algebrai kifejezésekkel!

a) Két szám összege.
b) Két szám összegének a kétszerese.
c) Két szám szorzata.
d) Egy számnak önmagával vett szorzata.
e) Melyik kifejezéssel találkoztál már a kerület- és területszámításnál?

4. Hány átló húzható egy konvex

a) négyszög egyik csúcsából;
b) ötszög egyik csúcsából;
c) hatszög egyik csúcsából;
d) k szög egyik csúcsából?

5. Juli két évvel fiatalabb, mint bátyja, Zsiga. Anya háromszor olyan idős mint Zsiga, és apa még anyánál is 6 évvel idősebb. Írd fel a négy családtag életkorát, ha

a) Juli 1 éves;
b) Juli 10 éves;
c) Juli 30 éves;
d) Juli x éves;
e) Zsiga z éves;
f) Anya a éves.
g) Az *a)*, *b)*, *c)* esetek közül melyik ad értelmes eredményt?

6. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny első fordulójában a hatodikosoknak 25 tesztfeladatot kellett megoldani. A helyesen megválaszolt feladat 4 pontot ér, a rossz válaszért viszont 1 pontot levonnak. Ha valamelyik kérdésnél semmit sem jelöl valaki, akkor arra a kérdésre nem kap pontot. A végén a kitűzött feladatok számát hozzáadják a versenyző pontszámához.

a) Hány pontja lett Xavérnek, ha 15 helyes válasz mellett 10 rossz válasza volt?
b) Hány pontja lett Yvettnek, ha 15 helyes válasz mellett 6 rossz válasza volt és 4 kérdést üresen hagyott?
c) Hány pontja lett Zalánnak, ha 14 helyes válasz mellett 3 rossz válasza volt és 8 kérdést üresen hagyott?
d) Hány pontja lett Annának, ha H darab helyes, R darab rossz válasz mellett U darab kérdést üresen hagyott?
e) Bea inkább úgy számolt, hogy a helyes válaszra 5 pontot, az üresen hagyott kérdésre 1 pontot, a rossz válaszra pedig 0 pontot adott, és nem adta hozzá a feladatok számát. Hány pontja lett ezzel a számítási módszerrel Xavérnak, Yvettnek és Zalánnak? Miért?

7. Írjátok fel egy-egy cetlire a következő kifejezéseket:

a; $a + 2$; 2; x; $2x$; $x \quad 4$; $2x + 4$; $2a + 2$; $a + 2x + 2$; $a + x$; $4x$.

Húzzon 12 gyerek 1-1 cetlit, és álljatok össze csoportokba a példa szerint (lehet, hogy valaki kimarad):

$\boxed{a} + \boxed{2} = \boxed{a+2}$

Álljatok össze más csoportokba is! Tervezzetek magatoknak feladatokat a cetlikre!

11. ÖSSZEVONÁS, ZÁRÓJELFELBONTÁS

Az algebrai kifejezésekben szereplő ismeretleneket általában betűkkel jelöltük, de annak sincs akadálya, hogy a betűk helyett más jelek szerepeljenek.

1. példa

Írjuk fel egyszerűbb alakban a $2 \cdot y - 3 + y + 5 - 3$ kifejezést!

Megoldás

A kifejezés értéke nem változik, ha felcseréljük az összeadások és kivonások sorrendjét. Írjuk előre az y-t tartalmazó tagokat és hátra a számokat. Átrendezve kapjuk, hogy:

$$2 \cdot y + y - 3 + 5 - 3$$

A számok összege: $-3 + 5 - 3 = -1$

$$2 \cdot y + y - 1.$$

Számoljuk le, hány darab y van a kifejezésben. A második y elé kiírhatjuk az 1 számot.

$$\underbrace{2 \cdot y + 1 \cdot y}_{3y} - 1,$$

$$3y - 1.$$

Az egyszerübb alak: $2 \cdot y - 3 + y + 5 - 3 = 3y - 1$.

Az elvégzett átalakításokat **összevonásnak** nevezzük.

Összevonás elvégzésekor ügyelni kell arra, hogy az ismert és ismeretlen tagokat külön-külön csoportosítva vonjuk össze; különböző előjelű tagok és törtek esetén az előjeles számok és a törtek összeadásáról tanultakat követjük.

Tavaly már számoltunk zárójeles kifejezésekkel, amikor azzal foglalkoztunk, hogyan érdemes elvégezni egy összeg vagy különbség szorzását. Most nem csak számokat, de betűket is fogunk használni.

2. példa

Bontsuk fel a zárójelet a következő kifejezésekben!

a) $3 \cdot (x - 2)$; *b)* $4 \cdot (x + 1)$; *c)* $5 \cdot (2 \cdot x + 3)$; *d)* $4 \cdot (5 \cdot x - 2)$.

Megoldás

a) $3 \cdot (x - 2) = 3 \cdot x - 3 \cdot 2 = 3x - 6$;
b) $4 \cdot (x + 1) = 4 \cdot x + 4 \cdot 1 = 4x + 4$;
c) $5 \cdot (2 \cdot x + 3) = 5 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot 3 = 10 \cdot x + 5 \cdot 3 = 10x + 15$;
d) $4 \cdot (5 \cdot x - 2) = 4 \cdot 5 \cdot x - 4 \cdot 2 = 20 \cdot x - 4 \cdot 2 = 20x - 8$.

A szám és a betű között lévő szorzójelet nem kötelező kiírni. Ha a szám és a betű között nem áll semmi sem, akkor az mindig szorzást jelent.

Például: $11 \cdot x = 11x$; $-3 \cdot y = -3y$; $0{,}02 \cdot v = 0{,}02v$; $\frac{3}{5} \cdot w = \frac{3}{5}w$.

Egy összeget (különbséget) úgy is megszorozhatunk egy számmal, hogy az összeg (különbség) tagjait szorozzuk az adott számmal, és a kapott szorzatokat összeadjuk, (kivonjuk).

3. példa

Bontsuk fel a zárójelet a következő kifejezésekben, ezután vonjunk össze!

a) $3 \cdot (x-2) - 4 \cdot (x+1)$ *b)* $5 \cdot (2 \cdot x + 3) - 4 \cdot (5 \cdot x - 2)$

Megoldás

a) $3 \cdot (x-2) - 4 \cdot (x+1) = 3 \cdot x - 3 \cdot 2 - 4 \cdot x - 4 \cdot 1 = 3 \cdot x - 4 \cdot x - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = -x - 6 - 4 = -x - 10$

b) $5 \cdot (2 \cdot x + 3) - 4 \cdot (5 \cdot x - 2) = 5 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot x + 4 \cdot 2 = 10 \cdot x - 20 \cdot x + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -10 \cdot x + 23$

Vigyázzunk az előjelekre!

Feladatok

1. Végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $3 \cdot x - 7 + 6 \cdot x + 3 - 4 \cdot x$; *b)* $-13 \cdot x + 8 + 5 \cdot x + 3 - 9 \cdot x$;

c) $-\frac{5}{3} \cdot x + 8 + 5 \cdot x + 3 - 9 \cdot x$; *d)* $\frac{3}{5} \cdot x - \frac{2}{3} + 2x - \frac{1}{5}$.

2. Vond össze, ahol lehet!

a) $a + 10a + 100a$; *b)* $100b - 90b + 10b - b$;

c) $0{,}1c + 0{,}01c + 0{,}89c$; *d)* $d - 2d + 3d$;

e) $a + 2b + 3a + 4b$; *f)* $f - 1 + 2f - 2$;

g) $g + 0{,}5g + 2g + 1{,}5g$; *h)* $3h + 100h - 2 + h$.

3. Bontsd fel a zárójeleket!

a) $2 \cdot (x-3)$; *b)* $(x-3) \cdot 3$; *c)* $4 \cdot (x-3)$; *d)* $-2 \cdot (x-3)$;

e) $-3 \cdot (x-3)$; *f)* $3 \cdot (3-x)$; *g)* $2 \cdot (2x-3)$; *h)* $3 \cdot (3x-2)$.

4. Bontsd fel a zárójeleket a következő kifejezésekben!

a) $5 \cdot (x-8)$; *b)* $-\frac{4}{5} \cdot (x-10)$; *c)* $\frac{5}{6} \cdot \left(x - \frac{12}{5}\right)$; *d)* $\frac{1}{2} \cdot (4x-10)$.

5. Bontsd fel a zárójeleket, majd végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $5(a+3) + 9(a+11)$; *b)* $5(2b+4) + 10(b-2)$;

c) $11(c-5) - 7(3+c)$; *d)* $7(d+3) - 3(d-3)$.

6. Bontsd fel a zárójeleket a következő kifejezésekben, ezután végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $\frac{1}{3}(a+6) - 5\left(\frac{1}{5} - \frac{a}{10}\right)$; *b)* $\frac{1}{2}(b+14) - 8\left(\frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right)$;

c) $6(2 \cdot c - 5) - 4\left(3 + \frac{1}{2} \cdot c\right)$; *d)* $\frac{6}{5}(15 \cdot d + 10) - 3\left(5 + \frac{2}{3} \cdot d\right)$.

12. EGYENLETEK MEGOLDÁSA LEBONTOGATÁSSAL

Ötödik osztályban találkoztunk már egyszerű egyenletekkel. Ezeket próbálgatással vagy lebontogatással meg is tudtuk oldani. Ismételjük át a tavaly tanultakat.

1. példa

Az iskola kispályás focibajnokságot szervez. A hatodikosok közül 4 fő kivételével minden fiú jelentkezett, így az évfolyam 5 csapatot nevez a bajnokságra. A kispályás focit 6 fős csapatok játsszák. Hány fiú van az évfolyamon?

Megoldás

A fiúk számánál 4-gyel kisebb szám a játékosok száma; ennek hatodrésze a csapatok száma.
Visszafelé gondolkodva: 5 csapat játékosainak száma: $5 \cdot 6 = 30$. Az évfolyam fiútanulói ennél 4-gyel többen vannak, tehát 34-en.
A csapatok számából kiindulva kiszámoltuk a fiúk számát; a fiúk számának ismeretében eljuthatunk a csapatok számához. A két okoskodást bemutató folyamatábra:

csapatok száma		játékosok száma		fiútanulók száma
5	$\xrightarrow{\cdot 6}$	30	$\xrightarrow{+4}$	34
=		=		=
5	$\xleftarrow{:6}$	30	$\xleftarrow{-4}$	34

Két dolog is feltűnő:
A: Az egymás alatti téglalapokban ugyanazokat a számokat látjuk.
B: Az egymás alatti nyilak fölött ugyanazok a számok szerepelnek, de szorzás helyett osztás, összeadás helyett kivonás művelettel.
A feladatban a fiúk száma ismeretlen. Ha ebből akarunk kiindulni, akkor betűkifejezést használunk helyette; például f betűt:

fiú tanulók száma		játékosok száma		csapatok száma
f	$\xrightarrow{-4}$	$f-4$	$\xrightarrow{:6}$	$(f-4):6$
=		=		=
34	$\xleftarrow{+4}$	30	$\xleftarrow{\cdot 6}$	5

A jobb szélső oszlop két sorának egyenlősége a feladathoz tartozó egyenlet: $(f - 4) : 6 = 5$.
Az egyenlet ismeretlenje f. Az alsó sor a lebontogatás (visszafelé gondolkodás) módszerével az egyenlet megoldását mutatja. Az egyenlet megoldása a bal oldali oszlop két sorából: $f = 34$.
A megoldás ellenőrzése: $(34 - 4) : 6 = 5$.

2. példa

Oldjuk meg lebontogatással a következő egyenletet: $(6 \cdot a - 8) : 4 = 13$!

Megoldás

$$\boxed{a} \xrightarrow{\cdot 6} \boxed{6 \cdot a} \xrightarrow{-8} \boxed{6 \cdot a - 8} \xrightarrow{:4} \boxed{(6 \cdot a - 8) : 4}$$

$$\boxed{10} \xleftarrow{:6} \boxed{60} \xleftarrow{+8} \boxed{52} \xleftarrow{\cdot 4} \boxed{13}$$

Az egyenlet megoldása: $a = 10$.

Ellenőrzés: $(6 \cdot 10 - 8) : 4 = 13$. Az egyenlet megoldása csakugyan $a = 10$.
A folyamatábra alsó sora a felső sorban elvégzett műveletek megfordítását tartalmazza fordított sorrendben. Az összeadás és a kivonás, illetve a szorzás és az osztás egymás fordított műveletei. Folyamatábra lerajzolása nélkül is megoldhatjuk a feladatot: $(13 \cdot 4 + 8) : 6 = 10$.

3. példa

Balázs kidolgozott egy matematikai bűvésztrükköt. A következőt kéri a hallgatóságtól:
Gondolj egy számra! Vonj ki belőle 5-öt! A kapott számot duplázd meg! Adj hozzá 10-et!
Csökkentsd ennek értékét a gondolt számmal! Most éppen a gondolt számot kaptad.
Mindig sikerül ez a trükk?

Megoldás

Jelöljük a gondolt számot d-vel!

$$\boxed{d} \xrightarrow{-5} \boxed{d-5} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{2 \cdot (d-5)} \xrightarrow{+10} \boxed{2 \cdot (d-5) + 10} \xrightarrow{-d} \boxed{2 \cdot (d-5) + 10 - d}$$

$$\boxed{d} \xleftarrow{+5} \boxed{d-5} \xleftarrow{:2} \boxed{2 \cdot d - 10} \xleftarrow{-10} \boxed{d + d = 2d} \xleftarrow{+d} \boxed{d}$$

Visszakaptuk a gondolt számot; tehát a trükk mindig sikerül, ha a hallgatóság jól számol fejben.
A feladathoz tartozó egyenletet a jobb oldali oszlop soraiból kapjuk:
$2(d - 5) + 10 - d = d$.

A lebontogatással kapott $d = d$ megoldás minden szám esetén igaz. Az ilyen egyenletet **azonosságnak** nevezzük.

12. EGYENLETEK MEGOLDÁSA LEBONTOGATÁSSAL

Feladatok

1. Határozd meg az ismeretlen értékét!

a) $x + 5 = 7$; *b)* $x + 2 = 11$; *c)* $x + 6 = 3$; *d)* $x + 13 = 0$;
e) $x - 5 = 7$; *f)* $x - 2 = 11$; *g)* $x - 6 = 3$; *h)* $x - 13 = 0$;
i) $5 \cdot x = 35$; *j)* $2 \cdot x = 18$; *k)* $6 \cdot x = 3$; *l)* $12 \cdot x = -4$;
m) $x : 5 = 40$; *n)* $x : 2 = 11$; *o)* $x : 6 = 3$; *p)* $x : 13 = 0$.

2. Határozd meg az ismeretlen értékét!

a) $x + 0{,}5 = 7{,}1$; *b)* $x + 2{,}3 = 10$; *c)* $x + 5{,}9 = 3{,}9$; *d)* $x + 0{,}13 = 0$;
e) $x - 3{,}3 = 7{,}7$; *f)* $x - 2{,}8 = 10{,}2$; *g)* $x - 5{,}5 = 0{,}5$; *h)* $x - 3{,}7 = 1{,}7$;
i) $5 \cdot x = 1$; *j)* $2 \cdot x = \frac{3}{2}$; *k)* $6 \cdot x = \frac{3}{7}$; *l)* $12 \cdot x = -\frac{4}{5}$;
m) $x : 5 = \frac{2}{10}$; *n)* $x : 2 = \frac{3}{7}$; *o)* $x : \frac{1}{2} = 3$; *p)* $x : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$.

3. Írd fel az egyenleteket és oldd meg!

a) Ha egy szám háromszorosából ötöt elveszek, tizenhármat kapok. Mi lehet a szám?
b) Ha egy szám ötszöröséből hármat elveszek, tizenhármat kapok. Mi lehet a szám?
c) Egy szám felénél kettővel kisebb szám a 30. Mi lehet a szám?

4. Add meg a megkezdett folyamatábrához tartozó egyenletet! Az ábra befejezésével oldd meg az egyenletet! A füzetedben dolgozz! Oldd meg folyamatábra lerajzolása nélkül is!

a) $\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 4} \boxed{} \xrightarrow{-8} \boxed{} \xrightarrow{:5} \boxed{} = 4$

b) $\boxed{8} \xrightarrow{-x} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{} \xrightarrow{+1} \boxed{} = 16$

c) $\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{} \xrightarrow{+10} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{-5} \boxed{} = x$

d) $\boxed{x} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{} \xrightarrow{+10} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{-x} \boxed{} = 4$

5. Találj ki a lecke 3. példájában szereplő Balázséhoz hasonló „trükköt”!

6. A lebontogatás módszerével, folyamatábra segítségével oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{2a - 5}{3} - 2 = 11$; *b)* $\frac{3b + 4}{11} + 7 = 9$; *c)* $\frac{5c - 3}{7} - 2 = 4$;
d) $\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}d - 1\right) = 7$; *e)* $\frac{1}{2}(8e - 5) - 1 = \frac{17}{2}$; *f)* $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}f + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

1. példa

Három testvér mindegyikénél van valamennyi pénz. Dórinál 200 Ft híján háromszor annyi, mint Balázsnál, Gergőé pedig Balázs pénzének kétszerese. Mennyi pénzük van a testvéreknek külön-külön, ha együtt 4600 Ft-juk van?

Megoldás

Gondosan elolvassuk és megértjük a szöveget.	Ismerjük a három gyereknél lévő pénzmennyiségek közti összefüggéseket, és ismerjük az összegüket.
Mit válasszunk ismeretlennek? „Mit jelöljünk x-szel?”	Dóri és Gergő pénzét is Balázséval összehasonlítva ismerjük, ezért ezt választjuk ismeretlennek.
Az ismeretlen és az ismert adatok közötti összefüggés felírása: „Dóri pénze 200 Ft-tal kevesebb, mint Balázs pénzének háromszorosa.” „Gergő pénze Balázs pénzének kétszerese.”	Balázs pénze: x. Dóri pénze: $3 \cdot x - 200$. Gergő pénze: $2 \cdot x$.
Milyen adatot nem használtunk még föl? Azt, hogy „együtt 4600 Ft-juk van”. Ez az összefüggés lesz a feladat egyenlete.	$x + 3 \cdot x - 200 + 2 \cdot x = 4600$
Megoldjuk az egyenletet, vagyis meghatározzuk az ismeretlen értékét. Megválaszoljuk a feladat többi kérdését.	$x + 3 \cdot x - 200 + 2 \cdot x = 4600$ /Összevonás $6 \cdot x - 200 = 4600$ Melyik számból kell 200-at kivonni, hogy 4600-at kapjunk? $6 \cdot x = 4800$ Melyik számot kell 6-tal szorozni, hogy 4800-at kapjunk? $x = 800$ Balázs pénze 800 Ft. Dóri pénze: $3 \cdot x - 200 = 3 \cdot 800 - 200 = 2200$ Ft. Gergő pénze: $2 \cdot x = 1600$ Ft.
A feladat szövegébe helyettesítve ellenőrizzük a megoldást. „Dóri pénze 200 Ft-tal kevesebb, mint Balázs pénzének háromszorosa.” „Gergő pénze Balázs pénzének kétszerese.” „Együtt 4600 Ft-juk van.”	$3 \cdot 800 - 200 = 2200$ $2 \cdot 800 = 1600$ $800 + 2200 + 1600 = 4600$

2. példa

Az itt következő két feladatban egy falusi gazda udvarán tartott háziállatok számát kell kiszámítani. A feladatokat többféle módon is megoldjuk.

a) Hány nyúl van az udvaron, ha összesen 42 fülük van?

b) Mennyi a bárányok és kacsák száma, ha 21 fejük és 54 lábuk van?

Megoldás

a) **Egyenlet nélkül:** A nyulak száma a fülek számának fele. $42 : 2 = 21$

Egyenlettel: A nyulak számát jelöljük x-szel.

A fülek száma ennek kétszerese: $2 \cdot x$

Az egyenlet: $2 \cdot x = 42$. Az a szám, amelyiknek a kétszerese 42.

$x = 21$

A nyulak száma 21.

b) Először egyenlet nélkül, **próbálgatással** oldjuk meg:

Táblázatba írjuk a bárányok és kacsák lehetséges számát, és kiszámítjuk a lábak számát:

Bárány	0	1	2	3	4	5	6
Kacsa	21	20	19	18	17	16	15
Lábak száma	42	44	46	48	50	52	54

Tovább nem kell próbálkozni, a többi esethez 54-nél több láb tartozik.

Okoskodással:

Vegyük figyelembe a kacsák szárnyát is.

Ezzel minden állathoz 4 végtag tartozik, összesen $21 \cdot 4 = 84$.

Ez a lábak számánál éppen a kacsaszárnyak számával több.

Tehát $84 - 54 = 30$ a kacsaszárnyak száma. 30 szárnya 15 kacsának van.

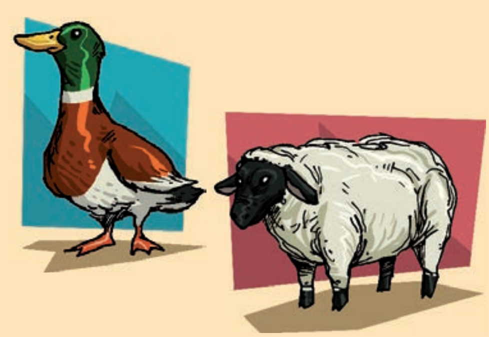
Egyenlettel is megoldjuk:

Jelöljük a bárányok számát x-szel.

A kacsák számát úgy kapjuk meg, hogy 21-ből kivonjuk a bárányok számát: $21 - x$.

A lábak száma a bárányok számának négyszerese + a kacsák számának kétszerese:

	fejek száma	lábak száma
Bárány	x	$4 \cdot x$
Kacsa	$21 - x$	$2 \cdot (21 - x)$
Összesen	21	$4 \cdot x + 2 \cdot (21 - x)$



Az egyenlet azt írja le, hogy a lábak száma összesen 54.

$4 \cdot x + 2 \cdot (21 - x) = 54$ A zárójelet felbontjuk:

$4 \cdot x + 42 - 2 \cdot x = 54$ Összevonunk:

$2 \cdot x + 42 = 54$ Melyik az a szám, amelyikhez 42-t adva 54-et kapunk?

$2 \cdot x = 12$ Melyik szám kétszerese 12?

$x = 6$

Az udvaron 6 bárányt és $21 - 6 = 15$ kacsát tartanak.

Ellenőrzés: A lábak száma: $6 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 24 + 30 = 54$.

3. példa

Harry, Ron és Hermione születésnapi ajándékot vásárolnak Hagridnak. Az Abszol úti seprűboltban 95 galleonért kínálnak nagy teherbírású drága seprűket. Harry kétszer annyit áldoz az ajándékra, mint Hermione, Ron pedig 5 galleonnal kevesebbet, mint Hermione. Mennyi pénzt ad be a három gyerek?

Megoldás

Oldjuk meg **egyenlettel!** Célszerű Hermione pénzét jelölni x-szel, mivel Harry és Ron pénzét is Hermionéhez hasonlítjuk:

Hermione	x
Harry	$2 \cdot x$
Ron	$x - 5$
Összesen	$x + 2 \cdot x + x - 5$

Az összes pénz 95 galleon.

Ezt írja le az egyenlet: $x + 2 \cdot x + x - 5 = 95$ Összevonunk

$4 \cdot x - 5 = 95$ Melyik számból kell kivonni 5-öt, hogy 95-öt kapjunk?

$4 \cdot x = 100$ Melyik szám négyszerese 100?

$x = 25$

Hermione 25 galleont, Harry $2 \cdot 25 = 50$ galleont, Ron $25 - 5 = 20$ galleont adott az ajándékra.
Ellenőrzés: Megnézzük, hogy a három varázsló pénzének összege 95 galleon-e. $25 + 50 + 20 = 95$.

4. példa

Dóri 3 évvel idősebb, mint öccse, Gergő. Ketten együtt 33 évesek.

a) Hány évesek most?

b) Hány évvel ezelőtt volt Dóri kétszer olyan idős, mint Gergő?

Megoldás

a) Gergő életkora legyen x, Dórié 3-mal több, tehát $x + 3$. Életkoruk összege így $x + x + 3$.
A feladat szövege alapján felírjuk az egyenletet:

$x + x + 3 = 33$ Összevonunk

$2 \cdot x + 3 = 33$ Melyik számhoz kell hozzáadni 3-at, hogy 33-at kapjunk?

$2 \cdot x = 30$ Melyik szám kétszerese 30?

$x = 15$

x jelölte Gergő életkorát, tehát Gergő 15 éves, Dóri 3-mal több, vagyis 18.
Ellenőrzéskor megnézzük, hogy életkoruk összege 33-e. $15 + 18 = 33$.

b) Jelöljük y-nal azt, ahány évvel ezelőtt Dóri 2-szer annyi idős volt, mint Gergő.
y évvel ezelőtt mindketten y évvel fiatalabbak voltak, tehát életkorukat y-nal kell csökkenteni:
Dóri $18 - y$, Gergő $15 - y$ éves volt. A feladat szerint: Gergő életkorának kétszerese = Dóri életkora.
Egyenlettel leírva:

$18 - y = 2 \cdot (15 - y)$ / Felbontjuk a zárójelet

$18 - y = 30 - 2 \cdot y$ / y évvel később, azaz most, Dóri 18, Gergő pedig $30 - y$ éves

$18 = 30 - y$ / 30-ból 12-t kell kivonni, hogy 18-at kapjunk, tehát $y = 12$

Ellenőrzés: 12 évvel ezelőtt Dóri $18 - 12 = 6$ éves volt, Gergő pedig $15 - 12 = 3$.
Dóri életkora csakugyan kétszerese volt Gergőének.

Feladatok

1. Egy állatkereskedés kirakatában papagájok és tengerimalacok vannak. Dávid 12 fejet és 36 lábat számolt össze. Hány papagáj és hány tengerimalac van a kirakatban?

2. A Múzeumkertben golyózó Pál utcai fiúktól a Pásztor testvérek golyókat raboltak. Nemecsektől és Richtertől ugyanannyit, Kolnaytól ennél 2-vel többet, Barabástól 4-gyel kevesebbet, összesen 30-at. Mennyi a Pál utcaiak vesztesége egyenként?

3. A Farkaskaland során Toldi Miklós nem számolta a perceket, amíg simogatta a farkaskölyköket. Amikor az anyafarkas szörnyű ordítással hátulról rátámadt, két perccel tovább viaskodott vele, mint amennyi időt a kölykök simogatásával töltött. A hímfarkassal még a nősténynél is 3 perccel lassabban végzett. Összesen 13 percet időzött a nádasban a farkasoknál. Hány percig simogatta a kölyköket, illetve hány perc alatt végzett a két rátámadó bestiával?

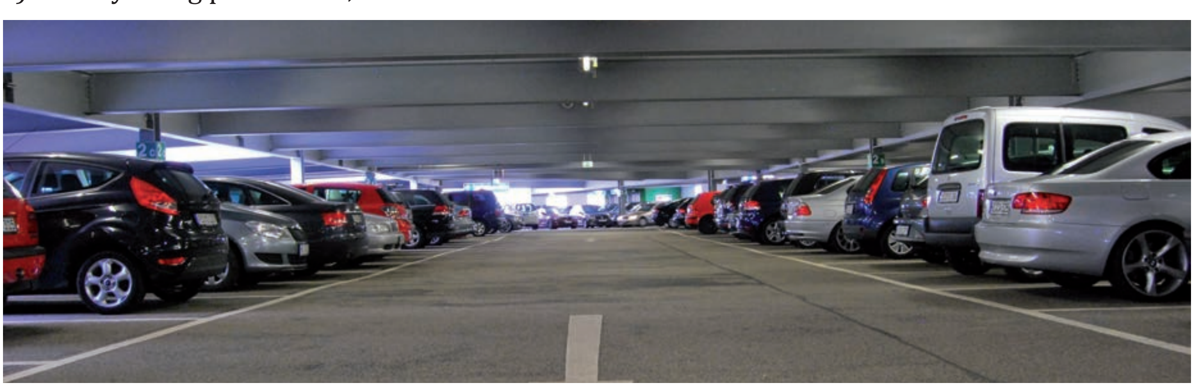
4. Egy mélyvízre figyelmeztető táblát tartó oszlop negyede a föld alatt, fele a vízben, 1 méter pedig a víz felett van.
Milyen mélységű vízre figyelmeztet a tábla?
Milyen hosszú az oszlop?

5. A 6. a osztály kosárlabdacsapata 66 pontot ért el az egyik mérkőzésén egy-, két-, illetve hárompontos dobásokból.
Az egy, két, illetve három pontot érő dobások számának aránya 2 : 3 : 1.
Hány egy-, két-, illetve hárompontos találatot ért el a csapat?

6. A mobilszolgáltatók kedvezménnyel jutalmazzák vásárlóik hűségét. Domonkos új telefont vásárol eddigi szolgáltatójától. Kétféle kedvezmény közül választhat.
- Új telefonja vételárából lebeszélhet 6000 Ft-ot, vagy
- 20% engedményt kap a vételárból.

Mekkora vételárig jár jobban Domonkos azzal, ha az első lehetőséget választja?

7. Egy fizetőparkoló díjszabása:
Az első óra: 400 Ft. Minden további megkezdett óra: 200 Ft.
a) Mennyibe kerül ebben a parkolóban egy 6,5 órás parkolás?
b) Mennyi ideig parkoltunk, ha 2400 Ft-ot fizettünk?



14. EGYENLŐTLENSÉGEK

Az egyenlőtlenség jelölésére korábban már használtuk a kisebb ($<$), kisebb vagy egyenlő ($\leq$), nagyobb ($>$) és a nagyobb vagy egyenlő ($\geq$) jeleket.

Például $2 < 5$; $5 \leq 5$; $x > 2$; $x \geq 2$.

Most egyenletek helyett egyenlőtlenségeket fogunk megoldani a lebontogatás módszerével.

1. példa

Gergő elektromos gitárra gyűjt. Interneten kinézett egy akciós hangszert: még fél évig 50 400 Ft-ért megvehető. Mostanáig 37 000 Ft-ot gyűjtött össze, és havi 2500 Ft-os zsebpénzét teljes egészében erre teszi félre. Összegyűlik fél év alatt a szükséges összeg?

Megoldás

Készítsünk táblázatot

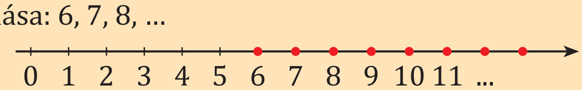
	Jelenleg	1 hónap múlva	2 hónap múlva	3 hónap múlva	4 hónap múlva	5 hónap múlva	6 hónap múlva
Gergő pénze	37 000 Ft	39 500 Ft	42 000 Ft	44 500 Ft	47 000 Ft	49 500 Ft	52 000 Ft

6 hónap alatt összegyűlik a gitár ára.
Számítsuk ki egyenlőtlenséggel, hogy mennyi idő alatt gyűlik össze a pénz!
Jelöljük x-szel a hónapok számát. Zsebpénze havonta 2500 Ft-tal nő, x hónap alatt $2500 \cdot x$. Összes megtakarított pénze ezért $37\,000 + 2500 \cdot x$.
Kérdésünk: hány hónap múlva lesz a megtakarítás elegendő, vagyis 50 400 Ft, vagy annál nagyobb?
Egyenlőtlenséggel felírva: $37\,000 + 2500 \cdot x \geq 50\,400$

A lebontogatás módszerét alkalmazzuk.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{x} & \xrightarrow{\cdot\, 2500} & \boxed{2500 \cdot x} & \xrightarrow{+37\,000} & \boxed{2500 \cdot x + 37\,000} \\
\rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} \\
\boxed{5{,}36} & \xleftarrow{:\, 2500} & \boxed{13\,400} & \xleftarrow{-37\,000} & \boxed{50\,400}
\end{array}$$

Gergő pénze legalább 6 hónap alatt éri el a gitár árát, de megveheti 7, 8, ... hónap múlva is.
Az egyenlőtlenség megoldása: 6, 7, 8, ...



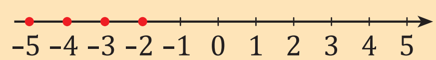
2. példa

Oldjuk meg az $5 - 5x > 10$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

Megoldás

$$\begin{tikzcd}
\boxed{x} \arrow[r, "\cdot(-5)"] \arrow[d, phantom, "\wedge"] & \boxed{-5x} \arrow[r, "+5"] & \boxed{-5x+5} \arrow[d, phantom, "\vee"] \\
\boxed{1} & \boxed{5} \arrow[l, ":(-5)"'] & \boxed{10} \arrow[l, "-5"']
\end{tikzcd}$$

Ha egyenlőség lenne, akkor az $x = -1$ lenne a megoldás.
A -1-nél nagyobb számok, azaz a 0, 1, 2, ... nem megoldásai az egyenlőtlenségnek. Behelyettesítve 5, 0, -5, ... értékeket kapunk, amelyek kisebbek 10-nél.
A -1-nél kisebb számok adják az egyenlőtlenség megoldását. -2, -3, -4, ... számokat behelyettesítve a 15, 20, 25, ... értékeket kapjuk. Ezek a számok valóban nagyobbak 10-nél.



Néhány egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal az előjeles számmal szorozzuk vagy osztjuk. Figyeljük meg a relációs jel irányának alakulását!

$4 < 6 \ / :2$	$4 < 6 \ / \cdot 2$	$-4 > -6 \ / :2$	$-4 > -6 \ / :(-2)$	$4 > -6 \ / \cdot(-3)$	$4 > -6 \ / :(-4)$
$2 < 3$	$8 < 12$	$-2 > -3$	$2 < 3$	$-12 < 18$	$-1 < 1{,}5$
nem változik	nem változik	nem változik	változik	változik	változik

Nem nehéz észrevenni, hogy **a relációs jel megfordul, ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk.** Egyenlőtlenségek megoldása során erre fokozottan kell ügyelni!

Feladatok

1. Panni kerékpárra gyűjt. Egy netes kereskedő oldalán talált egy 54 000 Ft-os biciklit. Ennek árából már 38 000 Ft-ot összegyűjtött. Heti 600 Ft-os zsebpénzét hozzáadva mennyi idő múlva veheti meg a kerékpárt?

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $3x - 5 > 0$; *b)* $-2x + 5 < 3$; *c)* $\frac{1}{2}x + 1 > 2$;

d) $1 \leq 4x + 5$; *e)* $1 \leq 2x - 3x + 5$; *f)* $2 \leq x - 3x - x + 3x$.

3. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $1{,}1x + 3 + 0{,}9 \leq 5$; *b)* $2x + 4 + 0{,}5x \geq -1$;
c) $\frac{y-5}{3} \leq 2$; *d)* $\frac{y+11}{11} \geq -1$.

4. Matyi hétfőn a 17. oldalon tartott a 132 oldalas *Ábel a rengetegben* című könyvben. Ha keddtől naponta 24 oldalt olvas, akkor melyik napon fejezi be a könyvet?

5. Hány oldalt kellene Matyinak naponta elolvasnia, ha a 129 oldalas *Ábel az országban* regénynek négy nap alatt akar a végére jutni?

6. Melyik nagyobb? Írd a megfelelő relációs jelet (< vagy >) a két szám közé! Dolgozz a füzetedben!

a) $7 + 5 \cdot 7 + 4$ vagy $6 \cdot 7 + 1$; *b)* $7 \cdot 9 - 9 + 2 \cdot 9 + 5$ vagy $8 \cdot 9 + 1$; *c)* $7 + \frac{7}{3} - \frac{7}{5}$ vagy $2 \cdot 7$.

7. Az x milyen értékei esetén lesz a $\frac{6x-12}{5}$ tört értéke

a) pozitív; *b)* nem negatív; *c)* negatív; *d)* 1-nél kisebb; *e)* 1-nél nem nagyobb?

8. A $T = \frac{14-x}{2}$ tört értéke az x értékétől függ.
a) Milyen pozitív x értékek esetén lesz a T tört értéke pozitív?
b) Milyen pozitív egész x értékek esetén lesz a T tört értéke pozitív?
c) Milyen pozitív x értékek esetén lesz a T tört értéke pozitív egész?

9. Az italautomata 10 és 20 forintosokat fogad el. Feltöltésekor az üzemeltető egy-egy zsákba üríti a bedobott érméket tartalmazó tartályt. Egy ürítéskor a 10 forintosokat tartalmazó zsák 4 kg tömegű lett, a 20-asokat tartalmazó 2 kg tömegű. A 20 forintos 15%-kal nehezebb a 10-esnél. Melyik zsák tartalma ér többet? Hány százalékkal?

10. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $3 \cdot x + x - 4 < 34$; *b)* $3 \cdot x - \frac{x}{2} < -9$;

c) $\frac{2 \cdot x - 7}{5} > 2$; *d)* $(x - 8) : 7 < -9$.

11. Zsófit megbízták azzal, hogy a piacon szerezzen be sárgabarackot. 2500 Ft-ot költhet el. Zsófi felmérte, hogy 1 kg barack ára 380 Ft és 550 Ft között mozog. Mennyi barackot vehet?

12. Erika 300 forinttal ment le a pékségbe. Egy zsömle 15 Ft és egy sajtos pogácsa 100 Ft.
a) Írj fel egyenlőtlenséget a feladat szövege alapján!
b) Hány zsömlét és pogácsát vehetett, ha kapott vissza pénzt?

15. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK GYAKORLÁSA

Feladatok

1. Az alábbi egyenletek között vannak olyanok, melyeknek azonos az alaphalmaza és az igazsághalmaza is.
Az ilyen egyenleteket **egyenértékűeknek**, idegen szóval ekvivalenseknek nevezzük.
Az egyenletek megoldásával keresd meg ezeket!
$4 \cdot (7 - x) = 48$; $2 \cdot x + 2 = 4$; $x - 2 = 4 - x$; $\frac{x-5}{2} = x$; $3 \cdot x = 6$; $3 \cdot x + 1 = 10$.

2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!
a) $4 \cdot x - 4 > 5$; *b)* $7 \cdot x < 14 \cdot x$; *c)* $4 \cdot x > 8 \cdot x$;
d) $3 \cdot x - 2 > -2$; *e)* $3 \cdot x - 2 < 2$; *f)* $3 \cdot x + 2 > 2$;
g) $(x - 5) \cdot 2 + 1 \geq -5$; *h)* $(x - 5) : 2 + 1 \geq -5$; *i)* $3 \cdot (x - 5) : 2 + 1 \geq -5$.

3. Végezd el a zárójelek felbontását és az összevonásokat! A füzetedben dolgozz!
$5 \cdot (x - 7) - 2 \cdot (x + 8)$; $2 \cdot (5 \cdot x + 1) - 7 \cdot (2 \cdot x - 6)$; $9 \cdot (4 \cdot x + 3) + 4 \cdot (5 \cdot x - 2)$.

4. Írj egyenletet az *a), b), c), d), e)* és *f)* feladatokhoz, és oldd is meg azokat!
Írj az előzőekhez hasonló szöveges feladatot a *g), h), i)* és *j)* egyenletekhez is!
a) Gondoltam egy számra. Megszoroztam 5-tel, hozzáadtam 10-et és 35-öt kaptam. Melyik számra gondoltam?
b) Gondoltam egy számra. Elosztottam 4-gyel, kivontam belőle 5-öt és 6-ot kaptam. Melyik számra gondoltam?
c) Gondoltam egy számra. Kivontam belőle 4-et, elosztottam 10-zel és 4-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
d) Gondoltam egy számra. A 9-szereséhez hozzáadtam 9-et, majd kivontam belőle az eredetileg gondolt szám felét. Így éppen 0,5-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
e) Egy szám kétszereséből kivontam hatot, aztán kivontam belőle a gondolt szám kétszeresét. Így éppen –6-ot kaptam. Melyik ez a szám?
f) Egy szám kétszereséből kivontam nyolcat és aztán kivontam az eredetileg gondolt számnál hárommal kisebb szám dupláját. Éppen 0-t kaptam. Melyik ez a szám?
g) $4 \cdot x - 6 - 2 \cdot x - 1 = 0$; *h)* $4 \cdot (x - 6) - 2 \cdot (x + 1) = 0$; *i)* $\frac{2x-3}{5} - \frac{2}{5}x + 3 = 0$; *j)* $\frac{2x-3}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = 0$.

5. Oldd meg az egyenleteket:
a) $x + 7 = 9 - 2$; *b)* $x + 7 - 9 \cdot x = -2$; *c)* $x + 7 \cdot x + 2 \cdot x = 9$;
d) $2 \cdot (x + 7) - 2 \cdot x = 7$; *e)* $7 = 2 \cdot x + 14 - x$; *f)* $-14 = 2 \cdot (x - 7) - 2 \cdot x$;
g) $-5 = 3 \cdot x + 1 - \frac{2}{3} \cdot x$; *h)* $0 = 3 \cdot x + 1 - \frac{2}{3} \cdot (x - 5)$; *i)* $\frac{2}{3} \cdot x - 3 \cdot (x + 1) - 5 = 0$.

6. Melitta háromnapos kerékpártúrán volt a barátaival. Az első napon fürödtek is a Balatonban, mégis megtették a teljes út egyharmad részét. A második napon az első napon megtett útnál 12 km-rel többet bicikliztek. Így a második nap végére már a teljes út háromnegyed részét megtették.
a) A teljes út hányad részét tették meg a második napon?
b) Hány kilométer hosszú volt a teljes út?
c) Hány kilométer hosszú utat tettek meg a második napon?

7. Másold le a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki a hiányzó értékeket!

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x + 1$	−3	−2										
$5 - x$	9	8										
$(x + 1)(5 - x)$	−27	−16										

A táblázat segítségével oldd meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket a megadott alaphalmazokon!

a) $(x + 1)(5 - x) = 0$ Az egész számok halmazán.
b) $(x + 1)(5 - x) = 0$ A pozitív egészek halmazán.
c) $(x + 1)(5 - x) > 0$ Az egész számok halmazán.
d) $(x + 1)(5 - x) > 0$ A pozitív egészek halmazán.
e) $(x + 1)(5 - x) = 10$ Az egész számok halmazán.
f) $(x + 1)(5 - x) > 10$ Az egész számok halmazán.
g) $(x + 1)(5 - x) < 10$ Az egész számok halmazán.
h) $(x + 1)(5 - x) \geq 5$ Az egész számok halmazán.

8. A metró szerelvényeinek első és utolsó kocsijában nagyobb a férőhelyek száma, mint a középső háromban. Az ülőhelyeké 8-cal, az állóhelyeké 13-mal. A teljes szerelvény ülőhelyeinek száma 211, az állóhelyeké 811. Az alábbi két egyenlet a fenti adatokból született.
a) $3 \cdot x + 2 \cdot (x + 8) = 211$;
b) $3 \cdot (y - 13) + 2 \cdot y = 811$.
A füzetedben fogalmazd meg azt a két kérdést, melyekre az egyenletek megoldása ad választ!
Mi az egyenletek alaphalmaza? Mit jelöltünk x-szel, illetve y-nal?
Oldd meg az egyenleteket a füzetedben!

9. Keresd meg a szöveges feladatokhoz tartozó egyenletet, és oldd meg a füzetben!
A) A 33 fős osztály tanulói 8 egyforma padot megtöltöttek, és egy tanulónak nem jutott hely. Hány személyes a pad?
B) A 33 fős 6. a osztályban 3-mal több a lány, mint a fiú. Mennyi a lányok és a fiúk száma?
C) A 33 fős osztályban mindenki tanulja az angol vagy a német nyelvet. Angolt 19, németet 17 diák tanul, és olyan is van, aki mindkettőt. Hányan tanulják mindkét nyelvet?
D) Az osztálylétszám harmadánál 4-gyel többen vannak a fiúk. A lányok 18-an vannak. Hány tanuló van az osztályban?

a) $19 + 17 - x = 33$; *b)* $8 \cdot x + 1 = 33$; *c)* $\frac{1}{3} \cdot x + 4 = x - 18$; *d)* $x + x + 3 = 33$.

10. Add meg a következő egyenlet igazsághalmazát: $x \cdot x = 4$!
a) Az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza.
b) Az alaphalmaz az egész számok halmaza.
Próbálkozz az $x = -5, -4, \ldots, 4, 5$ számok behelyettesítésével!

11. *a)* Oldd meg az $x \cdot x < 50$ egyenlőtlenséget! Az alaphalmaz az egyjegyű prímszámok halmaza.
b) Oldd meg az $x \cdot x > 100$ egyenlőtlenséget! Az alaphalmaz az egyjegyű pozitív számok halmaza.

16. ÖSSZEFOGLALÁS

A fejezet elején átismételtük a törtekkel végzett műveleteket, megismerkedtünk az aránypár fogalmával és a százalékszámítással.
A százalékszámításnál háromféle értéket kereshetünk: **alap**, **százalékérték**, **százalékláb**.

Egyszerű egyenletek megoldhatók a **lebontogatás** (visszafelé gondolkodás) módszerével.

$$(3 \cdot x - 7) \cdot 5 = 55$$

$$\boxed{6} \xleftarrow{:3} \boxed{18} \xleftarrow{+7} \boxed{11} \xleftarrow{:5} \boxed{55}$$

Az egyenlet megoldása $x = 6$.
A megoldás helyességét behelyettesítéssel ellenőrizzük: $(3 \cdot 6 - 7) \cdot 5 = 11 \cdot 5 = 55$.

Az egyenletekhez sokszor megadjuk az **alaphalmazt**, amelyben a megoldásokat keressük.
Az egyenlet **igazsághalmaza** az alaphalmaz azon elemeiből áll, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe, igaz kijelentést kapunk. Az igazsághalmaz elemei az egyenlet **megoldásai**.
Egyenlőtlenségeket is megoldhatunk lebontogatással, de ügyelni kell arra, hogy **a relációs jel megfordul, ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk.**
Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásakor szükség esetén egy-egy oldalon **összevonást** végzünk. Az ismert és ismeretlen tagokat külön-külön vonjuk össze.
Zárójeles kifejezéseket átalakíthatunk a zárójel felbontásával: ilyenkor **egy összeget úgy szorzunk egy számmal, hogy az összeg tagjait szorozzuk az adott számmal, és a kapott szorzatokat összeadjuk.**

Feladatok

1. Győző 6 órán keresztül hordott fát a kamrába, Viktor pedig csak 2 órán keresztül. Összesen 6000 forintot kaptak a tűzifa behordásáért.
a) A munka hányadrészét végezte el Győző, illetve Viktor?
b) Hányszor annyi munkát végzett Győző, mint Viktor?
c) Oszd el közöttük a 6000 forintot a munkájuk arányában!

2. Egy recept szerint a bodzavirágszörphöz 45 dkg bodzavirág, 3 liter víz, 6 dkg citromsav és 1 db szeletelt citrom kell. Néhány napig állni hagyjuk, majd leszűrjük. Hozzáadunk 3 kg cukrot, és ha szükséges, akkor annyi vizet, hogy összesen 6 liter legyen az elkészített szörp mennyisége.
a) Hány darab citrom kell 24 liter szörp elkészítéséhez?
b) Mennyi virágot rakjunk 9 liter vízbe?
c) 180 dkg virágot szedtünk. Ehhez mennyi citromsav szükséges?
d) Van otthon 6 darab citrom, 30 dkg citromsav. Hány dekagramm virágot szedjünk? Citromból vagy citromsavból lesz-e maradékunk?

3. Egy lakás havi közös költsége 10 950 Ft.
a) Mennyi közös költséget fizet az ott lakó család egy év alatt?
b) Egyszer egy összegben befizettek 54 750 Ft-ot. Ez hány havi költség kifizetését jelentette?

4. A táblázatban szereplő adatok között egyenes arányosság van. Másold le a táblázatot a füzetedbe, és írd be a hiányzó értékeket!

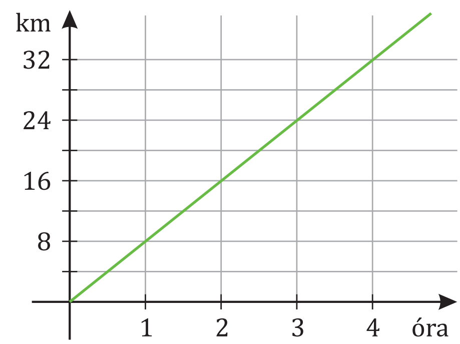
x	2	3	6	7				
y	9				22,5	40,5	36	81

5. A grafikon egy kerékpáros megtett útja és az ideje közötti kapcsolatot mutatja.

a) Készíts a grafikon alapján táblázatot!

b) Ha a kerékpáros ezt a sebességet tartaná, akkor 18 óra alatt hány kilométert haladna?

c) Ezzel a tempóval szeretne 60 km-t megtenni. Ez mennyi ideig tartana?



6. Testnevelésórán a gyerekek iskolakört futnak, vagyis az iskola kerítése mentén körbefutják az épületet. Az osztály hat legjobb eredménye a következő:
54 másodperc; 57 másodperc; 1 perc; 1 perc 6 másodperc; 1 perc 12 másodperc; 1 perc 21 másodperc. Ábrázold az eredményeket diagramon!

7. Ha a 2,4 kg cukoroldatban 96 gramm cukrot oldottunk fel, akkor 0,5 kg oldatban hány gramm cukor van?

8. Öt ládában 90 darab alma található. Ugyanilyen méretű almák és ládák esetén

a) hány darab alma van 13 ládában;

b) hány ládába csomagolható 306 darab alma?

9. Az osztálykirándulásra 14-en már befizették a pénzt, összesen 224 000 Ft-ot. Ha 25 fős az osztály, akkor még hány forint hiányzik?

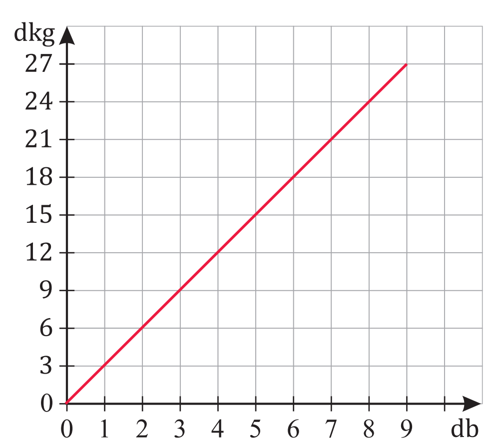
10. Négy kilogramm kristálycukrot vásároltunk, és 876 forinttal lett kevesebb a bankkártyánkon. Mennyi lett volna ez az összeg, ha

a) 3 kg; *b)* 5 kg

lett volna a vásárolt mennyiség?

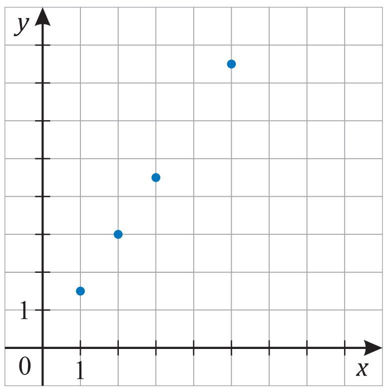
11. Másold át a táblázatot a füzetedbe, és a megadott ábra alapján írd be a hiányzó értékeket!

db	0	0,5	1	2	2,5	3	8,25	9
dkg								

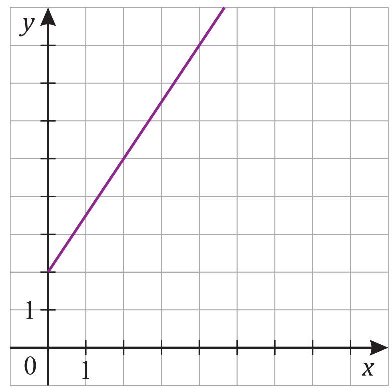


12. Melyik ábra mutat egyenes arányosságot?

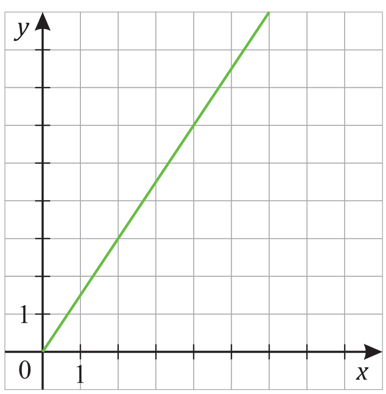
a)



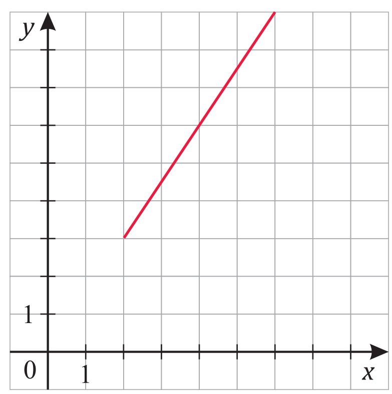
b)



c)



d)

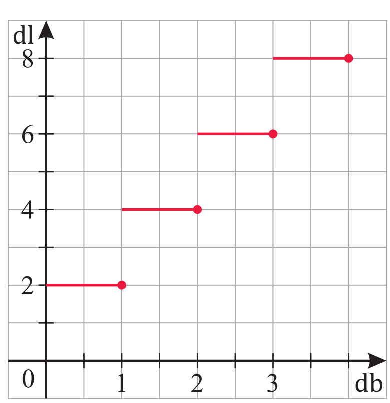


13. Egy kerék 18 fordulattal 32,4 métert tesz meg.
a) Hány métert gurul a kerék 29 fordulattal?
b) Hányszor fordult a kerék, miközben 45 métert haladt előre?

14. Egy távolsági autóbusz 12 perc alatt 12 km-t tesz meg. Ha átlagosan ezt a sebességet tartja, akkor
a) 1 óra alatt mekkora utat fog megtenni;
b) 72 km-t mennyi idő alatt tesz meg?

15. Ha 3 m^2-re 54 virágpalántát ültettek a kertészek, akkor egy 14 m^2-es területre hány palántát fognak ültetni?

16. Az ábra alapján írj egy szöveget!



17. Az előző feladat ábrájából annyit másolj le a füzetedbe, hogy az ábrád egyenes arányosságot mutasson! Ehhez is írj egy szöveget!

18. Nézz utána, hogy mennyi a tengerek átlagos sótartalma!
A Holt-tenger vize annyira sűrű, hogy az emberi test lebeg rajta. Ennek oka a magas, 30% körüli sótartalom.
a) Keresd meg térképen a Holt-tengert!
b) Hogyan állítanál elő otthon holt-tengeri vizet?
c) Egy átlagos méretű 150 literes fürdőkádba mennyi sót kellene tölteni, hogy úgy lebegj benne, mint a Holt-tengerben?

19. Írd fel a felsorolt számokat százalékos alakban!
0,1; 0,2; 0,25; 1; $\frac{12}{100}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{99}{100}$.

20. Rajzolj a füzetedbe akkora téglalapot, amelyiknek egyszerűen meg tudod rajzolni és be tudod színezni
a) az 50%-át; *b)* a 20%-át; *c)* az 5%-át; *d)* a 35%-át!

21. Számítsd ki
a) 120-nak a 30%-át; *b)* 1200-nak a 10%-át; *c)* 16-nak a 300%-át; *d)* 40-nek a 40%-át!

22. Melyik számnak
a) a 16%-a 48; *b)* a 7%-a 49; *c)* a 11%-a 22; *d)* az 5%-a 75?

23. Hány százaléka
a) 600-nak a 72; *b)* 490-nek a 147; *c)* 300-nak a 480; *d)* 14,4-nek a 3,312?

24. Gáspár kinőtt nadrágja helyett újat kellett vegyen az apja. Szerencsére téli leértékelés volt, és a 6800 Ft-os nadrágot 30% engedménnyel vehették meg. Mennyibe került a nadrág?

25. A piacon átvett az árus 600 kg almát, de két napig még a raktárban tárolta. A száradás miatt már csak 591 kg volt, amikor előhozta a raktárból. Hány százalékát veszítette el az alma a tömegének?

26. Számítsd ki a füzetedben, hogy ha egy 10 000 Ft-os termék árát kétszer egymás után 40%-kal csökkentik, akkor mekkora lesz a végső ár! Mekkora árengedménnyel lehet egy lépésben elérni a végső árat?

16. ÖSSZEFOGLALÁS

27. Joker vegyészének sikerült olyan mérget kevernie, amelyik mindenkit butává tesz. Tudjuk, hogy a keveréknek három alkotórésze van: számusz, geomusz és probusz. A három összetevő keveréke csak akkor veszélyes, ha az egyes alkotórészek aránya 2 : 4 : 5. A rendőrségnek sikerült nyolc gyanúsítottra szűkíteni a kört. Segíts nekik kinyomozni a tettest!

1. Akinél nem a keverékhez szükséges arányban talált anyagot a rendőrség a házkutatás során, az nem lehetett a tettes.

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Számusz (kg)	6	10	1	1	10	4	2	0,5
Geomusz (kg)	12	20	2	2	15	8	4	1
Probusz (kg)	15	25	5	2,5	25	10	5	2,5

2. A rendőrségnek az is tudomására jutott, hogy a vegyésznek pénzre volt szüksége, ezért ellenőrizték a gyanúsítottak bankszámláit. Azt a két embert, akinek a legtöbb pénze volt, ki lehetett zárni.

Gyanúsított	Bankszámla
1	600 000
2	20%-kal kevesebb, mint az 1-es gyanúsítotté.
3	200%-kal több, mint a 8-as gyanúsítotté
4	10%-kal több, mint a 2-es gyanúsítotté.
5	50%-kal több, mint a 7-es gyanúsítotté.
6	80%-kal kevesebb, mint a 2-es gyanúsítotté.
7	20%-kal kevesebb, mint a 6-os gyanúsítotté.
8	75%-kal kevesebb, mint az 1-es gyanúsítotté.

3. A merénylő pulóveréből egy kisebb anyagdarab kiszakadt, amikor terepszemlét tartott a városi víztározónál. Ezt a helyszínelők megtalálták. Az anyag összetétele 80% pamut, 15% műszál és 5% len.
A gyanúsítottak ruhájából vett mintákat különböző szakemberek vizsgálták és az alábbi eredményeket adták meg. Azt a két gyanúsítottat, akinek a ruhája más összetételben tartalmazta a felsorolt anyagokat, ki lehetett zárni.

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Pamut	0,8	$\frac{4}{5}$	400	0,8	$\frac{32}{40}$	80	$\frac{4}{5}$	16
Műszál	0,15	$\frac{1}{20}$	75	0,15	$\frac{6}{40}$	15	$\frac{3}{20}$	3
Len	0,05	$\frac{3}{20}$	25	0,5	$\frac{2}{40}$	5	$\frac{1}{20}$	1

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Arány	0,10	$\frac{1}{10}$	0,15	0,12	20%	0,05	18%	$\frac{1}{5}$

4. Átvizsgálták a gyanúsítottak számítógépét is. Akinek a böngészési előzményeiben a legkisebb arányban szerepeltek a butító méreghez kapcsolódó lapok, azt ki lehetett zárni.

Melyik gyanúsítottat nem zárta ki a rendőrség?

28. A 6. a-ban a gyerekek öthatoda sportol, és mindenki egyféle sportot űz. Az osztály tanulóinak 40%-a valamilyen labdajátékot játszik. A gyerekek közül 20% vív, 10% atletizál, 10% úszik és 1 gyerek sakkozik.
a) Hányan járnak az osztályba?
b) Hány gyerek űzi az egyes sportágakat?

29. Ha egy szálloda kihasználtsága 72%-os és éppen 108 vendég van, akkor
a) hány férőhely van a szállodában?
b) hány férőhely üres?

30. Anna ismerősei közül 29 gyerek ugyanabba az iskolába jár mint ő, és ez éppen 25%-a az ismerőseinek. Ezen kívül van még 21 olyan gyerek ismerőse, aki nem iskolatársa.
a) Hány ismerőse van összesen?
b) Hány gyerek ismerőse van összesen?
c) Hány felnőtt ismerőse van?

31. Vond össze az algebrai kifejezéseket!
a) $2a + 10 + 3a$; *b)* $3b + 10 + 3b - 1$; *c)* $c + 2c + 3c + 4c$;
d) $12d + 15 - 3d$; *e)* $41e + 10e - 17$; *f)* $f - 2f + 3f - 4f + 4$.

32. Bontsd fel a zárójeleket és végezd el az összevonásokat!
a) $3 \cdot (a + 2b)$; *b)* $(2a + b) \cdot 3$; *c)* $a + (a + b) \cdot 3 - b$;
d) $x + (x + 2) \cdot 5 - 10$; *e)* $3x + 3 \cdot (x - 5) - 5x$; *f)* $3(x + 1) - 3 \cdot (x - 1) - 6$.

33. Oldd meg az egyenleteket!
a) $2a + 6 = 12$; *b)* $8 + 3b = -13$; *c)* $1 - 5c = 41$;
d) $\frac{1 + d}{2} = 10$; *e)* $\frac{1}{2} \cdot (1 + e) - \frac{e}{2} = \frac{1}{2}$; *f)* $\frac{f + 3f}{f} = 6$.

34. Oldd meg az egyenlőtlenségeket az egész számok halmazán!
a) $2a + 6 \le 12$; *b)* $8 + 3b \ge -13$; *c)* $1 - 5c < 41$;
d) $2a + 6 \ge 12$; *e)* $8 + 3b \le -13$; *f)* $1 - 5c > 41$.

35. Gondoltam egy számra, a nyolcszorosából kivontam 5-öt, végül elosztottam 3-mal. Eredményül 17-et kaptam. Melyik számra gondoltam? Írd fel a megfelelő egyenletet, oldd meg lebontogatással!

36. Egy szálloda három épületében összesen 407 vendéget helyeztek el. Az első épületben 10 vendéggel több van, mint a harmadikban, a harmadikban pedig 8 vendéggel több van, mint a másodikban. Hány vendég lakik az egyes épületekben?

37. Anna: 1500 Ft-tal több pénzem van, mint neked.
Zita: Ha mégegyszer annyit gyűjtök, mint amennyi pénzem most van, akkor is csak fele annyi pénzem lesz, mint neked most van.
Mennyi pénze van Annának és Zitának?

38. A Habzsi családhoz vendégek jönnek, ezért reggel meggyes és csokis sütit sütöttek, összesen 80 darabot. A vendégek késtek, a Habzsi család pedig várakozás közben megette a meggyes sütik harmadát és a csokis sütik felét. Így a kétféle sütiből összesen 46 darab maradt.

a) Hányadrésze maradt meg a meggyes süteménynek?
b) Hányadrésze maradt meg a csokis süteménynek?
c) Hányadrésze maradt meg az összes süteménynek?
d) Hány darab meggyes süteményt sütöttek?
e) Hány darab csokis süteményt sütöttek?

39. Matyi és Viktor ugyanannyi focis matricát vásárolt.
Amikorra Matyi beragasztotta a matricák $\frac{1}{7}$ részét, addig Viktor már négyszer annyi matricát ragasztott be a gyűjtő albumba.
Matyi: Nekem kétszer annyit kell még beragasztanom, mint neked.
Viktor: Nekem már csak 12 matricát kell beragasztanom.
a) Matyi matricáinak hányadrésze maradt meg?
b) Viktor matricáinak hányadrésze maradt meg?
c) Hány matricája maradt meg Viktornak?
d) Hány matricát vettek eredetileg a fiúk?

40. Az Árpád-házi királyokról rendezett történelemverseny előtt Hisztoria tanár néni kiadott néhány olvasmányt a gyerekeknek. Adél vállalta a harmadát, Berci a maradék $\frac{3}{7}$-ét, Csongor pedig a maradék 8-at.

a) Hányadrészt vállalt Berci az összes olvasmányból?
b) Hányadrész maradt Csongorra?
c) Hány olvasmányt adott ki a gyerekeknek összesen a tanárnő?

IV. Kerület, terület, felszín, térfogat

– Valami baj van? – kérdezte Panni Attilát, aki aggodalmas arccal nézte a monitort.
– Nem baj, inkább csak számítanunk kell egy kis kellemetlenségre – fordult felé a fiú. – A következő állomásunk a Varea-tér, és az eddigi tapasztalatok alapján történhetnek furcsaságok, amíg átjutunk a bolygó légkörén. Ne aggódjatok, ez csak egy látszólagos jelenség, és pár perc alatt el is fog múlni.
– Hupsz! – hallatszott Zsombor felől, aki nagyon furcsa arcot vágott.
Szó szerint egyre nagyobbra kerekedő szemmel nézték, ahogy Zsombor minden irányban növekedni kezdett. Mire kétszer akkorának látszott, addigra már nyolcszoros lett a térfogata, és a többiek elhűlve csodálkoztak rá igencsak megszélesedett vállaira.
– Jujj, neee! – sikkantott Zsuzsi, aki lassan, de megállíthatatlanul szintén terebélyesedni kezdett.
Attila már csak kuncogott, amikor látta saját magán, hogy virsli méretűre duzzadnak az ujjai.
Panni járt a legrosszabbul, de mégis ő gyógyult leggyorsabban. Először majd háromszorosra puffadt a teste, majd szép lassan lelappadt, mire leszálltak a bolygó űrkikötőjében. Miközben kimasíroztak a hajóból, még egy ellenőrző pillantást vetett a panorámaablak tükröződő felületére, és elégedetten bólintott. Úgy érezte, egy nagyon picit mintha gömbölyűbb maradt volna, mint korábban volt.

1. A SOKSZÖGEK KERÜLETE

A téglalap határvonalának hosszát, vagyis a kerületét már tavaly meghatároztuk. A **téglalap kerülete** az oldalak hosszának összegével egyenlő. A kerület hosszúságot jelent. A kerület jele k vagy K.
Ha a téglalap szomszédos oldalainak hossza a és b, akkor:

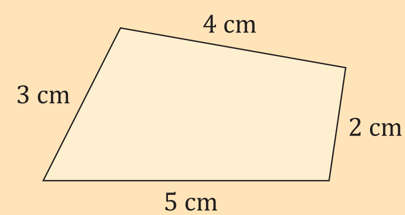
$K = a + b + a + b = 2 \cdot (a + b) = 2(a + b)$.

Ez a képlet alkalmas volt a **négyzet kerület**ének a meghatározására is. Használjuk fel, hogy a négyzet minden oldala egyenlő hosszúságú, ezért:

$K = a + a + a + a = 4 \cdot a = 4a$.

1. példa

Megadtuk az ábrán látható négyszög oldalainak hosszát. Milyen hosszú vonalat húztunk, amikor megrajzoltuk a négyszöget?

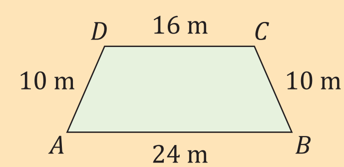


Megoldás

Járjuk végig gondolatban a négyszöget! Jegyezzük le, hogy milyen hosszú oldal mentén haladtunk a ceruzánkkal! Így megkapjuk a vonal hosszát, vagyis a négyszög kerületét: $K = 4\ \text{cm} + 3\ \text{cm} + 5\ \text{cm} + 2\ \text{cm}$.
Ezeket a hosszúságokat összeadjuk, és készen vagyunk: $K = 14\ \text{cm}$.
Ezt rövidebben így is írhatjuk: $K = 4 + 3 + 5 + 2 = 14\ (\text{cm})$.
Mivel menet közben nem írtuk ki a mértékegységet, a sor végén csak zárójelben jelezzük, hogy végig centimétert használtunk.

2. példa

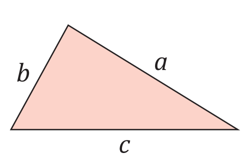
Egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) alakú kertet szeretnének bekeríteni. Milyen hosszan kell kerítést készíteni, ha a kert adatait az ábráról leolvashatjuk?



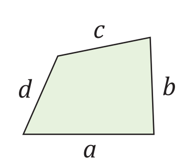
Megoldás

Gondolatban végighaladunk a kerítés vonalán. Induljunk az A csúcstól a B irányába! Ekkor a következő oldalhosszakat járjuk be, ezeket kell összegeznünk: $K = 24 + 10 + 16 + 10 = 60\ (\text{m})$.
Vagyis 60 méter hosszan kell kerítést készíteni.

A látott példák alapján megfogalmazható, hogy a síkidom kerületének meghatározása a határvonal hosszának megadását jelenti.
Sokszögek esetén az összes határoló oldalszakasz hosszát kell összeadnunk.



Háromszög kerülete: $K = a + b + c$.



Négyszög kerülete: $K = a + b + c + d$.

Ezek alapján az eddig tanult sokszögek kerületére könnyen tudnánk képletet adni.

Feladatok

1. Számítsd ki a négyzet kerületét, ha egyik oldalának hossza
a) $a = 325$ mm; *b)* $b = 12{,}5$ cm; *c)* $c = 34$ dm; *d)* $d = 6{,}2$ m!

2. Számítsd ki a téglalap kerületét, ha egyik oldala a, másik oldala b hosszúságú!
a) $a = 23$ cm, $b = \frac{2}{5}$ m; *b)* $a = 9{,}8$ dm, $b = 770$ mm;
c) $a = \frac{4}{25}$ dm, $b = 3{,}4$ cm; *d)* $a = \frac{3}{16}$ km, $b = 35{,}5$ m.

3. Ismerjük egy egyenlőszárú háromszög két oldalának a hosszát. Mekkora lehet a kerülete?
a) 8 cm és 6 cm; *b)* 10,2 cm és 6,6 cm; *c)* 13 mm és 6 mm; *d)* 3 dm és 1,5 dm.

4. Egy négyzet alakú telek bekerítéséhez 122 m drótkerítést használtak fel, de kihagyták a 6 m széles kapu helyét. Határozd meg a telek oldalának hosszúságát!

5. Egy deltoid két különböző hosszúságú oldalának összege 20,4 m.
a) Mekkora a deltoid kerülete?
b) Mekkora lesz a deltoid kerülete, ha a rövidebb oldalait 42 cm-rel növeljük, a hosszabb oldalait pedig 5,5 dm-rel csökkentjük?

6. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis!
a) Egy négyszög kerülete kisebb, mint a leghosszabb oldal hosszának négyszerese.
b) Van olyan húrtrapéz, amelynek pontosan három oldala egyenlő hosszúságú.
c) Van olyan rombusz, amely esetében a rövid átló hosszának négyszerese a rombusz kerületét adja.

7. Egy szabályos háromszög minden oldalának hosszát megnöveljük 30 cm-rel. Hogyan változik a kerülete?

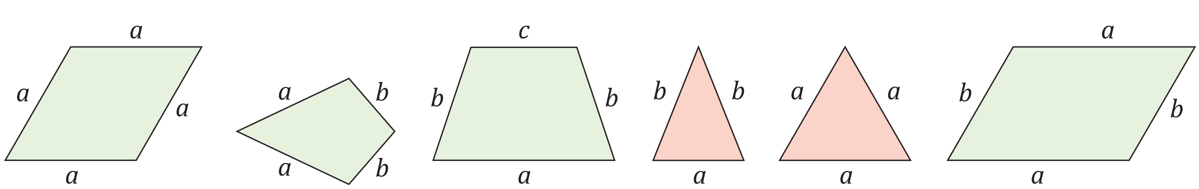
8. Egy rombusz két szemközti oldalának hosszát 3,2 dm-rel, a másik két szemközti oldalának hosszát pedig 239 mm-rel növeljük meg. Hány centiméterrel lesz nagyobb az így kapott paralelogramma kerülete a rombusz kerületénél?

9. Egy 98 cm hosszú drótból olyan paralelogrammát szeretnénk hajtogatni, amelynek az egyik oldala 13 cm-rel rövidebb, mint a másik. Mekkorák lesznek a paralelogramma oldalai?

10. Egy négyzet, egy paralelogramma és egy húrtrapéz kerületét számítottuk ki, majd a végeredményeket összekevertük: 52 cm, 51 cm, 50 cm. Mindegyik négyszög minden oldala centiméterben mérve egész szám volt. Mennyi az egyes négyszögek kerülete?

11. Egy szabályos és egy egyenlő szárú háromszög kerületét számítottuk ki. Az egyik 2005 cm, a másik 2004 cm. Mindkét háromszög minden oldala centiméterben mérve egész szám volt. Melyik háromszög kerülete a nagyobb?

12. Adj kerületképletet a képen látható speciális sokszögekre!



2. TERÜLET, TÉRFOGAT

A területmérésnél használt mértékegységek:
négyzetmilliméter, négyzetcentiméter, négyzetdeciméter, négyzetméter, ár, hektár, négyzetkilométer.

$$1\ \mathrm{mm}^2 < 1\ \mathrm{cm}^2 < 1\ \mathrm{dm}^2 < 1\ \mathrm{m}^2 < 1\ \mathrm{a} < 1\ \mathrm{ha} < 1\ \mathrm{km}^2$$

$\cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100$

A testek felszínének megadásakor is a terület mértékegységeit használjuk.

A térfogatmérésnél használt mértékegységek:
köbmilliméter, köbcentiméter, köbdeciméter, köbméter, köbkilométer.

$$1\ \mathrm{mm}^3 < 1\ \mathrm{cm}^3 < 1\ \mathrm{dm}^3 < 1\ \mathrm{m}^3 < 1\ \mathrm{km}^3$$

$\cdot 1000 \quad \cdot 1000 \quad \cdot 1000 \quad \cdot 1\,000\,000\,000$

Az űrmérték egysége az **1 liter**.
1 liter = 1 dm³.
Az űrtartalom mérésénél használt mértékegységek: milliliter, centiliter, deciliter, liter, hektoliter.

$$1\ \mathrm{ml} < 1\ \mathrm{cl} < 1\ \mathrm{dl} < 1\ \mathrm{l} < 1\ \mathrm{hl}$$

$\cdot 10 \quad \cdot 10 \quad \cdot 10 \quad \cdot 100$

Kutatómunka

Népmesékben, régi történetekben találkozhatsz a meszely, icce, akó szavakkal. Mit jelentenek ezek? Készíts egy gyűjteményt az ezekhez hasonló régi mértékegységekről! Add meg a ma használatos egységekkel is ezeket!
Nézz utána, hogy mit jelent a négyszögöl, magyar hold és katasztrális hold!

Feladatok

1. Párosítsd a mérőszámokat a mértékegységekkel úgy, hogy három egyenlő mennyiséget kapj!
60 0,6 6000 cm² dm² m²

2. Válogasd szét két halmazba a következő mértékegységeket!
liter hektár négyzetméter deciliter négyszögöl milliliter ár

3. Add meg négyzetmilliméterben!

a) 3 cm^2; *b)* 15 cm^2; *c)* 7 dm^2; *d)* 125 dm^2;
e) 8 m^2; *f)* 29 m^2; *g)* 0,012 m^2; *h)* 1,65 m^2.

4. Add meg négyzetméterben!

a) 5200 dm^2; *b)* 13 400 dm^2; *c)* 120 000 cm^2; *d)* 85 000 cm^2;
e) 0,000 02 km^2; *f)* 0,000 035 km^2; *g)* 330 000 mm^2; *h)* 820 000 000 mm^2.

5. Add meg négyzetdeciméterben!

a) 5000 cm^2; *b)* 660 cm^2; *c)* 87 m^2; *d)* 26 m^2;
e) 5 ár; *f)* 0,6 ár; *g)* 11 ha; *h)* 0,005 ha;
i) 17 m^2; *j)* 0,3 m^2; *k)* 920 m^2; *l)* 0,012 m^2.

6. Rakd területük alapján növekedő sorrendbe a következő újsághirdetésekben szereplő telkeket!

a) Pest megyében Budapesthez közel 2500 nm-es telek elfogadható áron eladó.
b) Miskolctól 20 km-re 1600 négyszögöles építési telek eladó. Érdeklődni a megadott telefonszámon lehet.
c) Debrecenben, csöndes, nyugodt környezetben, félhektáros telken lakások eladók.

7. A 3,6 km^2 nagyságú földön elkezdték a szántást. Az első napon 450 000 m^2-t, a második napon 48 hektárt sikerült felszántani.

a) Mennyit kell még szántani a második nap után?
b) Ha hat nap alatt szeretnék befejezni a munkát, akkor a további napokon átlagosan hány hektárral kellene végezni?
c) Hány km^2 lesz a hat napra vonatkoztatott napi átlagos felszántott terület, ha a hat nap alatt elkészülnek a teljes munkával?

8. Add meg köbmilliméterben!

a) 3 cm^3; *b)* 7 cm^3; *c)* 2 dm^3; *d)* 5 dm^3;
e) 2 liter; *f)* 0,3 liter; *g)* 1,4 dl; *h)* 150 ml.

9. Add meg deciliterben!

a) 4 dm^3; *b)* 12 dm^3; *c)* 1,5 m^3; *d)* 0,1 m^3;
e) 18 000 mm^3; *f)* 0,06 m^3; *g)* 0,6 liter; *h)* 0,4 hl;
i) 72 liter; *j)* 480 hl; *k)* 1700 liter; *l)* 0,04 hl.

10. Egy építkezés megkezdésekor az alap kiásása során 16 000 m^3 földet kell elszállítani. Négy darab 4 m^3-es és nyolc darab 6 m^3-es rakodórésszel rendelkező teherautó végzi a munkát. Hányszor kell fordulni a tizenkét teherautónak, hogy a földet elszállítsák?

11. Három üvegben összesen 28 dl szörp volt, de az elsőből már elfogyott 0,2 liter bodza-, a másodikból 30 cl eper-, a harmadikból 200 ml málnaszörp. Így most mindegyik üvegben ugyanannyi maradt. Mennyi szörpöt tartalmaztak eredetileg az üvegek?

3. A SOKSZÖGEK TERÜLETE

A téglalap és a négyzet területét már meg tudjuk határozni.
Ha a téglalap oldalainak hossza a és b, akkor a területe: $\boldsymbol{t = a \cdot b = ab}$.
A négyzet minden oldala egyenlő hosszúságú, ezért a területe így számolható: $\boldsymbol{t = a \cdot a = a^2}$.

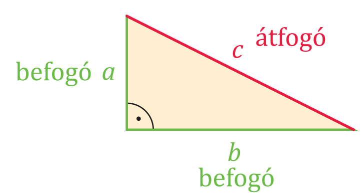
1. példa

A kertészek szeretnek különböző színű virágokból geometriai mintákat kialakítani. Egy tér közepén a 8 méter széles és 12 méter hosszú, téglalap alakú virágágyást az átló mentén kettéosztották. A téglalap egyik felébe piros, a másik felébe fehér virágokat ültettek. Mekkorák ezek a részek külön-külön?

Megoldás

A virágágyás területe: $t = 8 \cdot 12 = 96$ (m^2).
Az átló két egybevágó derékszögű háromszögre vágja a téglalapot, ezért mindkét rész a téglalap területének felével egyenlő, azaz 48 m^2.

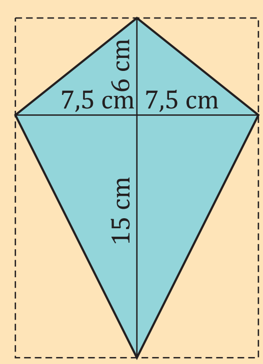
A téglalap két szomszédos oldala a derékszögű háromszögnek is oldala lesz. Ezek a derékszögű háromszög **befogói.** A téglalap átlója is oldala a derékszögű háromszögnek. Ez a derékszögű háromszög **átfogó**ja.



A példában láttuk, hogy a **derékszögű háromszög területét a két befogó szorzatának fele adja:** $\boldsymbol{t = \frac{ab}{2}}$.

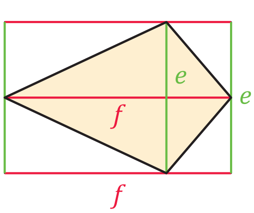
2. példa

Színes írólap méretű papírból a képen látható módon deltoidot vágtunk ki. Mekkora területű a deltoid?



Megoldás

Az adatok alapján az írólap két oldalának hossza: 15 cm és 21 cm.
Ennek a téglalapnak a területe: $15 \cdot 21$, azaz 315 cm^2.
A nagy téglalapot négy kisebb téglalapra osztottuk. Ezeket a téglalapokat a deltoid oldala felezi. Ugyanúgy, ahogyan az előző példában ezt már láttuk.
Ezért a nagy téglalap területének a felével egyenlő a deltoid területe: 157,5 cm^2.



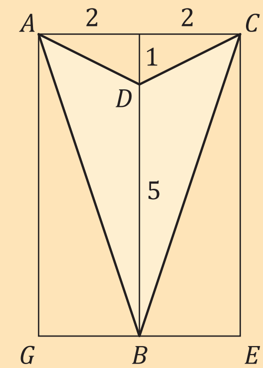
A nagy téglalap oldalainak hossza pontosan a deltoid átlóinak hosszával egyenlő, vagyis a **konvex deltoid területe az átlók szorzatának felével egyenlő:** $\boldsymbol{t = \frac{ef}{2}}$.

Vizsgáljuk meg a konkáv deltoidokat is!

3. példa

Egy konkáv deltoid szimmetriatengelyre eső átlója 5 cm, a másik átlója 4 cm hosszú. A rövidebb átló felezőpontja 1 cm-re van a hosszabb átló egyik végpontjától. Készítsünk ábrát! Számítsuk ki a deltoid területét!

Megoldás

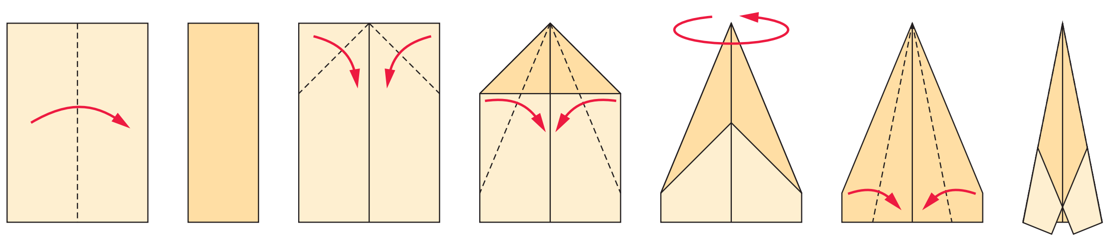


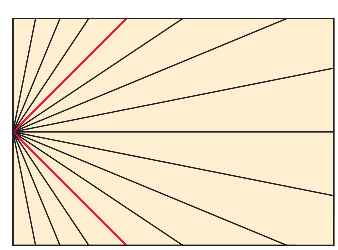
Az *ABCD* deltoidot foglaljuk be az ábrán látható *AGEC* téglalapba!
A téglalap területe: $4 \cdot (5 + 1)$, azaz 24 cm^2.
Az *ABC* háromszög területe a téglalap területének fele: 12 cm^2.
A deltoid területe ennél az *ADC* háromszög területével kisebb. Az *ADC* háromszög két derékszögű háromszögből áll, ezért a területük összegét meg tudjuk határozni: 2 cm^2.
Vagyis a deltoid területe: $t = 12 - 2 = 10$ (cm^2).
Ha a két átló hosszának szorzatát elfelezzük, akkor is ezt kaptuk volna.

A példák azt mutatják (és ez igazolható), hogy a konvex és a konkáv deltoidok területe is: $\boldsymbol{t = \frac{ef}{2}}$.

Csapatmunka

Egy 21 cm-szer 29,7 cm-es A4-es lapból hajtogassatok repülőt! A mellékelt ábrák segítenek.





Kipróbálás után nyissátok szét a lapot! A hajtásvonalak adnak egy mintát.
Beszéljétek meg!
- Mekkora szöget zár be egymással két szomszédos hajtásvonal?
- Vannak-e olyan hajtásvonalak, amelyek merőlegesek egymásra?
- A két hajtásvonalat pirossal berajzoltuk. Ezek két háromszögre és egy ötszögre osztják a téglalapot. Mekkora területűek ezek a sokszögek?

Feladatok

1. Számítsd ki a téglalap területét, ha oldalainak hossza:
a) 34 cm és 45 cm;
b) 28 cm és 90 cm;
c) 2 dm és 18 cm;
d) 0,3 m és 74 cm!

2. Mekkora a négyzet területe, ha
a) $k = 164$ cm;
b) $k = 640$ m;
c) $k = 16$ km;
d) $k = 256$ mm?

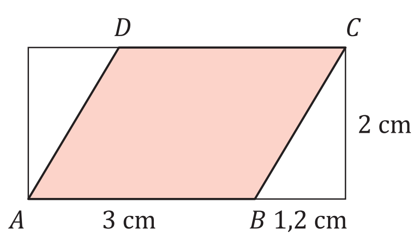
3. Számítsd ki a derékszögű háromszög területét, ha két befogójának hossza
a) 16,4 cm és 8,6 cm;
b) 135 m és 42 m;
c) 16 mm és 32 mm;
d) 25 dm és 125 dm!

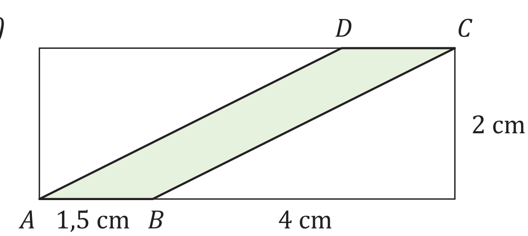
4. Egy írólap mérete: 14,6 cm és 21 cm. Vágd ketté az átlója mentén! Mekkora területű darabokat kaptál?

5. Egy adott deltoidnak pontosan két derékszöge van. Az oldalainak hossza 8 cm és 5 cm. Mekkora a területe?

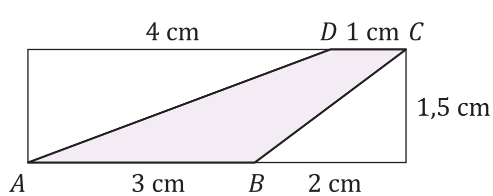
6. Egy téglalap oldalainak hossza 5 cm és 12 cm. Vágd szét az egyik 13 cm hosszú átlója mentén! Az így kapott két derékszögű háromszöget illeszd úgy össze, hogy deltoidot kapj! Mekkora a deltoid két átlója?

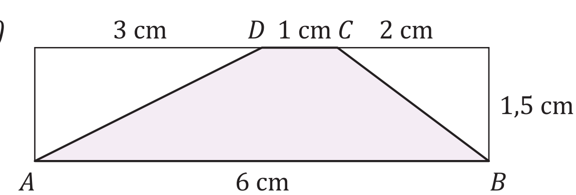
7. Határozd meg a következő paralelogrammák területét!

a)


b)


8. Határozd meg a következő trapézok területét!

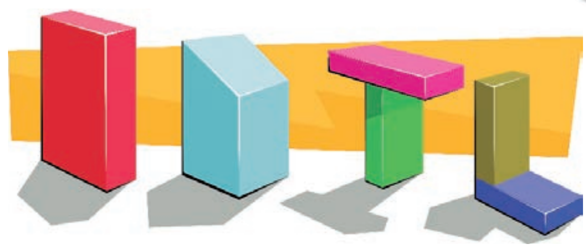
a)


b)


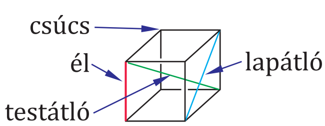
9. Ábrázold a következő pontokat koordináta-rendszerben: $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(7; 2)$, $D(4; 5)$, $E(1; 5)$, $F(-2; 5)$! Legyen a koordináta-rendszer egysége 1 cm!
a) Nevezd meg a következő sokszögeket: *AEF*, *ABCE*, *ACDE*!
b) Mekkora a területe az *a)* kérdésben szereplő sokszögeknek?

A pontok, egyenesek, síkok összefoglaló neve: térelemek. A térelemek segítségével **test**eket hozhatunk létre.

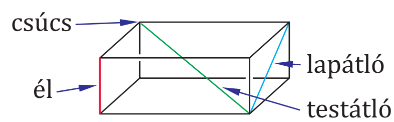
Vannak olyan testek, amelyeket csak sokszöglapok határolnak.



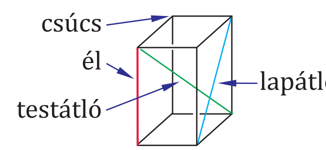
Élnek nevezzük a síklapok metszésvonalát, **csúcs**nak az élek metszéspontját. Két nem szomszédos csúcs összekötésével **átló**t kapunk. A **lapátló** egy oldallapra illeszkedik. A nem oldallapra illeszkedő átlókat **testátló**nak nevezzük.



kocka



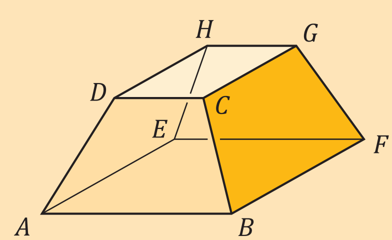
téglatest



négyzetes oszlop

1. példa

Soroljuk fel az ábrán látható test lapjait, éleit, lapátlóit, testátlóit!

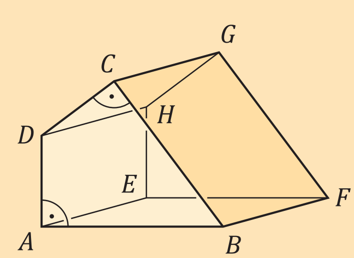


Megoldás

Lapok: *ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH*.
Élek: *AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE*.
Lapátlók: *AC, BD, AF, BE, BG, CF, CH, DG, DE, AH, EG, FH*.
Testátlók: *AG, BH, CE, DF*.

2. példa

Az ábrán látható test élei között keressünk merőlegesen metszőket, párhuzamosakat, kitérőket!



Megoldás

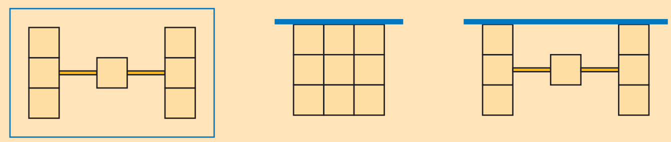
Merőlegesen metszők: $AB \perp AD$, $CB \perp CD$, $AB \perp BF$, ...
Párhuzamosak: $AB \parallel EF$, $AE \parallel BF$, $CD \parallel GH$, ...
Kitérők: *AB* és *HG*, *BF* és *DC*, *AD* és *EF*, ...

3. példa

Rajzoljuk le vázlatosan a képen látható asztalt felülnézetben, oldalnézetben és elölnézetben!

Megoldás

Felülnézet Oldalnézet Elölnézet



Válassz a környezetedből egy tárgyat, és rajzold le annak is a három nézetét!

Kutatómunka

Törd a fejed: legkevesebb hány lap határolhat egy testet?

Feladatok

1. A kocka egy lapját beszíneztük zöldre. Hány olyan egyenes illeszkedik a kocka két csúcsára, amelyiknek nincs zöld pontja?

2. Milyen helyzetű lehet a téglatest két lapátlója?

3. Rajzolj a füzetedbe egy kockát, és színezd ki egy élét és egy testátlóját úgy, hogy
a) metszők; *b)* kitérők legyenek!

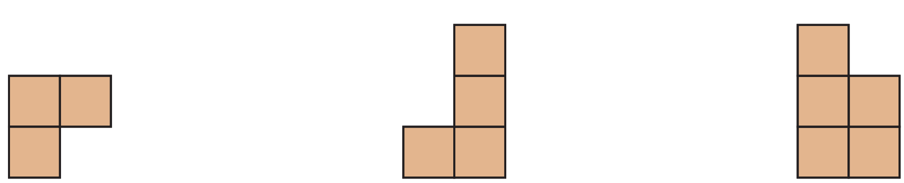
4. Lehet-e egy kocka éle és egy testátlója párhuzamos?

5. Mérd meg, hogy egy téglatest alakú doboz egyik csúcsa milyen messze van a többi csúcstól! Hány különböző hosszúságot fogsz kapni? Mindegyiket sikerült megmérned?

6. Egy téglatest alakú doboz három különböző élének hossza: 6 cm, 2 cm és 3 cm. Milyen messze van a doboz egy kiválasztott csúcsa azoktól az oldallapoktól, amelyekre nem illeszkedik ez a csúcs?

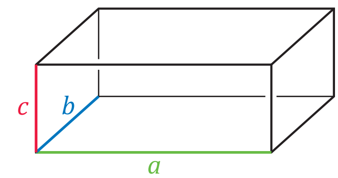
7. Rajzold le azt a testet, amelynek három nézetét megadtuk!

Felülnézet Oldalnézet Elölnézet



A téglatest és a kocka felszínét meg tudjuk határozni, csak az élek hosszát kell ismernünk hozzá. A téglatestet hat téglalap határolja, amelyekből két-két szemközti egybevágó.

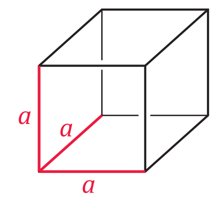
Ha a téglatest lapjainak területét összeadjuk, akkor a téglatest felszínét kapjuk. A felszín jele: A.



Ha a téglatest három, egy csúcsból induló élének hossza a, b és c, akkor a **téglatest felszíne:**

$A = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) = 2(ab + bc + ac)$.

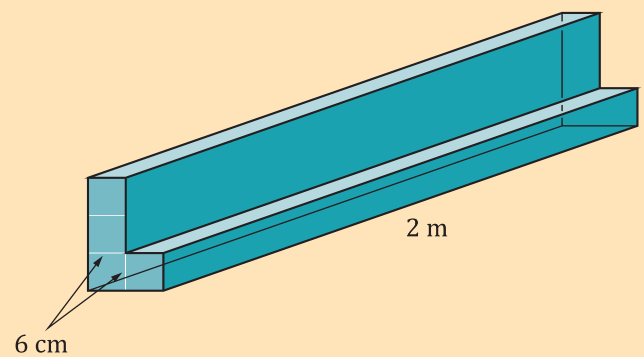
Ez a képlet kocka esetén így módosul: $A = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a)$.
Vagyis az a élű **kocka felszíne:** $A = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$.



A sokszögekkel határolt testek felszínét akkor tudjuk meghatározni, ha a határoló sokszögek területét ki tudjuk számítani.

1. példa

Mekkora az ábrán látható oszlop felszíne?

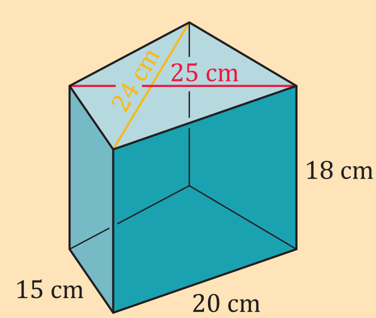


Megoldás

Az oszlop alsó és felső lapja egy-egy egybevágó hatszög. Az ábrán látható módon ezt a hatszöget egy téglalapra és egy négyzetre tudjuk darabolni. A megadott adatok alapján egy ilyen sokszögnek a területe:
$T = 6 \cdot 18 + 6 \cdot 6 = 108 + 36 = 144\ (\text{cm}^2)$.
Az oszlopot még hat téglalap határolja. Ezek mindegyikének egyik oldala 2 m, azaz 200 cm. A másik oldaluk pedig 18 cm, 6 cm, 12 cm, 6 cm, 6 cm és 12 cm hosszúságú. Látjuk, hogy háromféle téglalap határolja.
Ezek területe:
$T_1 = 18 \cdot 200 = 3600\ (\text{cm}^2)$, $T_2 = 12 \cdot 200 = 2400\ (\text{cm}^2)$, $T_3 = 6 \cdot 200 = 1200\ (\text{cm}^2)$.
Az oszlop felszíne:
$A = 2 \cdot T + T_1 + 2 \cdot T_2 + 3 \cdot T_3 = 2 \cdot 144 + 3600 + 2 \cdot 2400 + 3 \cdot 1200 = 288 + 3600 + 4800 + 3600 = 12\,288\ (\text{cm}^2)$

2. példa

Egy ajándéknak dobozt készítünk. A dobozt két egybevágó deltoid és két-két egybevágó téglalap határolja. Készítsük el a doboz hálózatát! Ami a valóságban 1 cm, az a rajzunkon 1 mm legyen! Mekkora lesz a doboz felszíne?



Megoldás

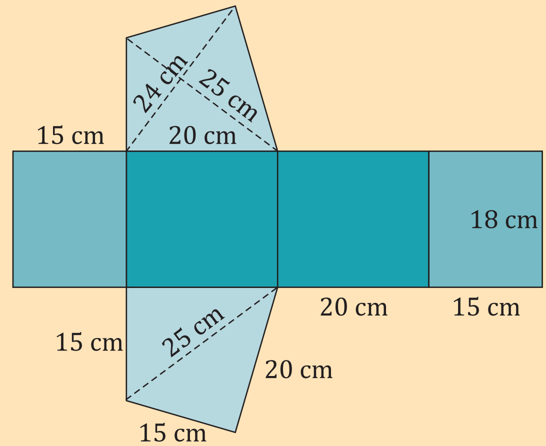
A doboz hálózatát mutatja az ábra.

A deltoid területe: $T = \dfrac{24 \cdot 25}{2} = 300\ (\text{cm}^2)$.

Az egyik téglalap területe: $T_1 = 20 \cdot 18 = 360\ (\text{cm}^2)$.

A másik téglalap területe: $T_2 = 15 \cdot 18 = 270\ (\text{cm}^2)$.

A doboz felszíne:
$A = 2 \cdot (T + T_1 + T_2) = 2 \cdot (300 + 360 + 270) = 1860\ (\text{cm}^2)$.



Feladatok

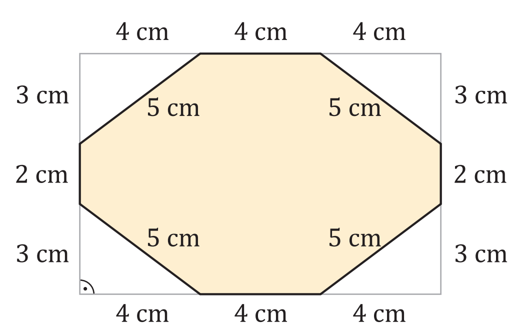
1. Számítsd ki a téglatest felszínét, ha az élei a, b és c hosszúságúak!
a) $a = 48$ cm, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm; *b)* $a = 4{,}8$ dm, $b = 2$ dm, $c = 3{,}4$ dm;
c) $a = 3$ m, $b = 22$ dm, $c = 105$ cm; *d)* $a = 2$ dm, $b = 220$ cm, $c = 44\,100$ mm.

2. Számítsd ki a téglatest hiányzó élének hosszát!
a) $b = 8$ cm, $c = 12$ cm, $A = 392\ \text{cm}^2$; *b)* $b = 6$ cm, $c = 17$ cm, $A = 555\ \text{cm}^2$.

3. Számítsd ki a kocka felszínét, ha az éleinek hossza
a) $a = 52{,}8$ cm; *b)* $a = 3{,}54$ dm!

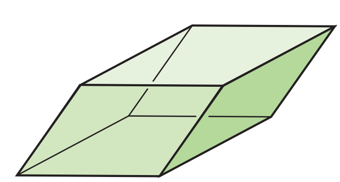
4. Számítsd ki a kocka élének hosszát!
a) $A = 864\ \text{cm}^2$; *b)* $A = 2646\ \text{cm}^2$.

5. Egy műanyag doboz alja és teteje egybevágó nyolcszög, amelynek adatait a vázlatrajz mutatja. Mekkora a doboz felszíne, ha a magassága 12 cm?

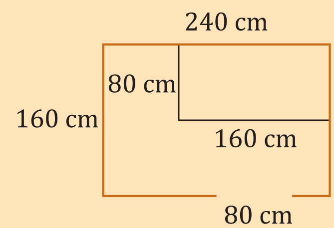


6. Kockát építünk 27 egybevágó, 2 cm élű kiskockából. Hogyan változhat az építmény felszíne, ha egy kiskockát elveszünk
a) a sarkáról; *b)* az élének a közepéről;
c) a lap közepéről?

7. Hat egybevágó rombuszból állítottuk össze az ábrán látható dobozt.
A rombuszok átlói 10 cm és 7 cm hosszúságúak. Mekkora a test felszíne?



1. példa

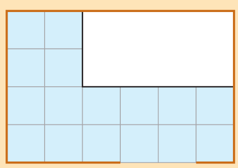


Felújítjuk a fürdőszobát. Az alapterülete egy 160 cm-szer 240 cm-es téglalap, a magassága 260 cm.
Az ajtaja 2,1 méter magas és 80 cm széles. Az egyik sarokban lesz a 160 cm-szer 80 cm-es kád, ennek magassága 60 cm. A fürdő padlóját 40 × 40 cm-es négyzet alakú járólapokból szeretnénk kirakni. Az ajtó tetejéig fogunk minden függőleges felületet 20 cm-szer 30 cm-es téglalap alakú csempékkel burkolni. A csempék rövidebb oldala lesz vízszintes. A többi rész fehérre lesz festve.

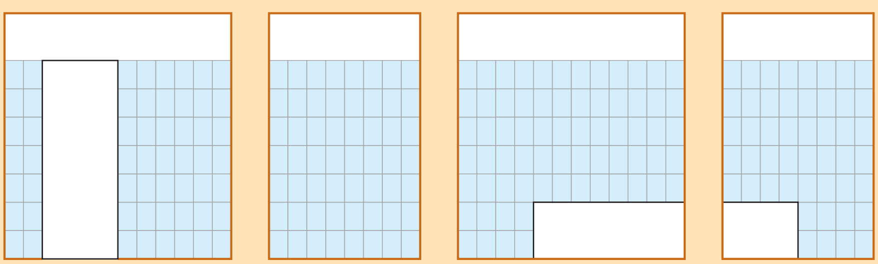
a) Tervezzük meg a négy fal és az aljzat látványát a burkolólapokkal!
b) Mekkora területű részt kell a járólapokkal befedni? Hány darab járólapra lesz szükség?
c) Mekkora felületet kell csempézni? Hány darab csempe takarja ezt a felületet?
d) Mekkora részt kell fehérre festeni?

Megoldás

a) A fürdőszoba alja:



A fürdőszoba oldalfalai:



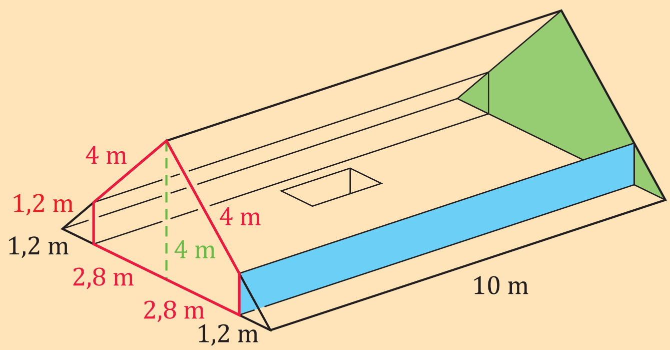
b) A burkolandó részre 16 darab járólapot lehet lerakni.
Egy járólap területe: $40 \cdot 40 = 1600$ (cm^2).
Az összterület: $16 \cdot 1600 = 25\,600$ (cm^2).
Vagyis 2,56 m^2-t kell járólapokkal lefedni.

c) Amennyit a kád takar a falakból, pontosan annyit a kád oldalán is burkolni kell. Csak az ajtó nyílását kell kihagynunk a számolás során.
A burkolandó felület:
$T = 210 \cdot 160 + 210 \cdot 240 + 210 \cdot 160 + 210 \cdot (240 - 80) =$
$= 210 \cdot (160 + 240 + 160 + 160) = 210 \cdot 720 = 151\,200$ (cm^2).
Egy csempe területe: $T = 20 \cdot 30 = 600$ (cm^2).
Mivel $151\,200 : 600 = 252$, ezért 252 darab csempe kell a burkoláshoz.
A rajzaink azt mutatják, hogy ezeket vágás nélkül fel lehet ragasztani a falra. (A valóságban persze lehetnek kisebb eltérések, így általában szükséges a csempék igazítása az illesztéseknél.)

d) A plafont és a csempék fölötti 50 centiméteres részt kell fehérre festeni. Ennek a résznek a területe:
$T_2 = 160 \cdot 240 + 2 \cdot (160 \cdot 50 + 240 \cdot 50) = 38\,400 + 2 \cdot (8000 + 12\,000) = 78\,400$ (cm^2),
ami közel 8 m^2.

2. példa

Egy 8 méter széles és 10 méter hosszú ház padlásterét szeretnénk beépíteni. A padlástér két egyforma, függőleges oldalfala egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög (az ábrán az egyiket zöldre színeztük). Beépítéskor hosszában mindkét oldalon készült egy-egy 1,2 méter magas fal (ebből az egyiket kékre színeztük az ábrán).



a) Mekkora területet kell padlószőnyeggel fedni, ha a feljáró egy 1,2 méterszer 1,8 méteres téglalap alakú rész?

b) Minden falat festeni szeretnénk. Mekkora felületre kell festéket vásárolnunk, ha a ferde felületeken hat darab 2 m^2-es tetőtéri ablak található?

Megoldás

a) A 10 m hosszú szoba szélessége az ábra alapján 5,6 m. Ezek alapján a területe:
$T_1 = 10 \cdot 5{,}6 = 56$ (m^2).

A feljáró területe:
$T_2 = 1{,}2 \cdot 1{,}8 = 2{,}16$ (m^2).

A kettő különbsége adja a felhasznált padlószőnyeg területét:
$T = T_1 - T_2 = 56 - 2{,}16 = 53{,}84$ (m^2).

b) Hat síkidomot kell lefesteni, de csak háromféle síkidommal kell számolnunk, mert mindegyikből 2-2 van.
A függőleges téglalap területe:
$T_1 = 10 \cdot 1{,}2 = 12$ (m^2).

A ferde téglalap területe:
$T_2 = 10 \cdot 4 = 40$ (m^2).

Az ötszög függőlegesen szimmetrikus. Az egyik felét úgy kapjuk, hogy egy 4 m-es befogójú derékszögű háromszögből levonunk egy 1,2 m-es befogójú derékszögű háromszöget. Ezt felhasználva az ötszög területe: $T_3 = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2}{2}\right) = 2 \cdot (8 - 0{,}72) = 14{,}56$ (m^2).

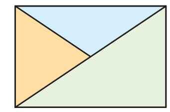
A teljes felület: $2 \cdot (12 + 40 + 14{,}56) = 133{,}12$ (m^2).

A hat ablak területe: $6 \cdot 2 = 12$ (m^2).

A festendő felület: $A = 133{,}12 - 12 = 121{,}12$ (m^2).

Feladatok

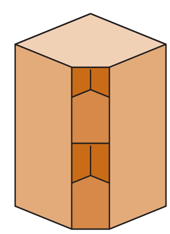
1. A 20 cm-szer 30 cm-es csempe három színnel színezett az ábrán látható módon.
a) Az 1,6 méterszer 2,1 méteres felületet hány darab ilyen csempével lehetne burkolni?
b) Megoldható-e vágás nélkül a burkolás?
c) Hány m^2-esek lesznek az egyes színek által fedett részek?



2. A 80 cm széles és 210 cm magas ajtót 10 darab egybevágó, 25 cm oldalú négyzet díszíti. Az ajtó így vízszintesen és függőlegesen is szimmetrikus.
a) Milyen széles sávok vannak a négyzetek között, ha azok mindenütt egyenlők, és az ajtó jobb és bal oldalán is ugyanolyan szélesek ezek a sávok?
b) Mekkora a sáv a négyzetlapok mellett lent és fent?

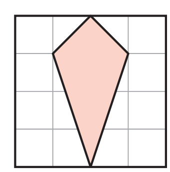
3. Egy terem oldalfalait halványsárgára, a tetejét fehérre szeretnék festeni. A terem 2,5 méter magas, a szélessége 6 méter, a hosszúsága 12 méter. A négy ablak és az ajtó felülete 18 m^2. Egy festékesdoboz 16 m^2-re elegendő festéket tartalmaz. Az új színt két rétegben kell felvinni a felületre, mert úgy lesz szép. Hány doboz festéket kell vásárolni?

4. Egy polcrendszer sarokelemét látod az ábrán. Mekkora a felső ötszöglap területe, ha a hozzákapcsolódó szekrények szélessége 60 cm, a hátsó élek pedig 80 cm hosszúak?

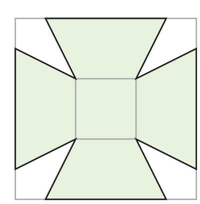


5. A 20 cm oldalú, négyzet alakú, sötétbarna csempéken tíz darab világosbarna, egyenként 5 cm^2-es kör alakú díszítés látható. Mekkora a csempén a sötétbarna felület?

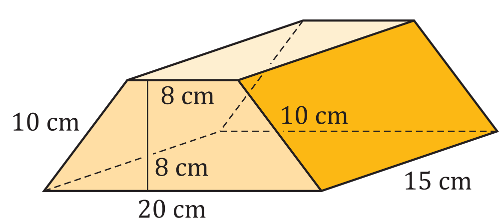
6. A 16 dm^2-es járólapokra az ábrán látható mintát tervezték. Egy 3,2 méter széles és 4 méter hosszú szobát ezzel burkolva hány m^2 lesz a sötétebb árnyalatú rész területe?



7. A 12 cm oldalú négyzetlap sarkaiból deltoidokat vágunk ki, majd összehajtva egy felül nyitott dobozt állítunk össze belőle. A doboz alja 4 cm oldalú négyzet, a kivágott deltoidok rövid oldala 2 cm hosszúságú. Mekkora a doboz felszíne?



8. Egy doboz vázlatrajzát mutatja az ábra.
a) Készítsd el a doboz hálózatát!
b) Mekkora a test felszíne?



7. ÁTDARABOLÁSSAL MEGADHATÓ TESTEK TÉRFOGATA

Az élek ismeretében a téglatest és a kocka térfogatát már meg tudjuk határozni.

Ha a téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hosszát összeszorozzuk, akkor a téglatest térfogatát kapjuk.

Ha a téglatest három, egy csúcsból induló élének hossza a, b és c, akkor a téglatest térfogata:

$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c = abc.}$

Ezt a képletet alkalmazhatjuk a **kocka térfogatának** meghatározására is. Felhasználjuk, hogy a kocka minden éle egyenlő hosszú:

$\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a.}$ Ezt röviden így írjuk: $\boldsymbol{V = a^3.}$

Ügyesen használva ezeket nem csak téglatest alakú dolgok térfogatát tudjuk meghatározni. Erre nézünk most példákat.

1. példa

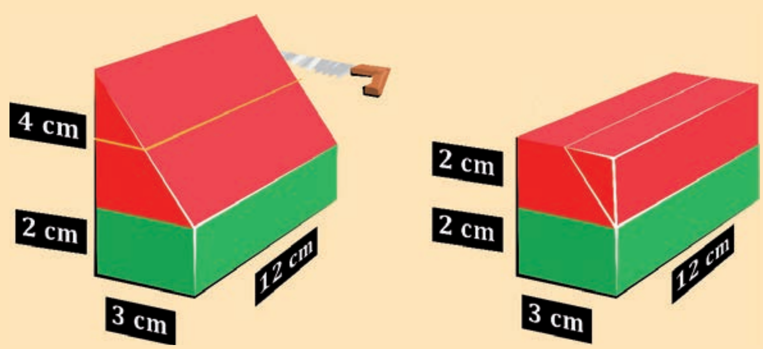
Egy építőjáték két elemét egymásra raktuk. Melyiknek nagyobb a térfogata?

Megoldás

A téglatest alakú elem térfogata:

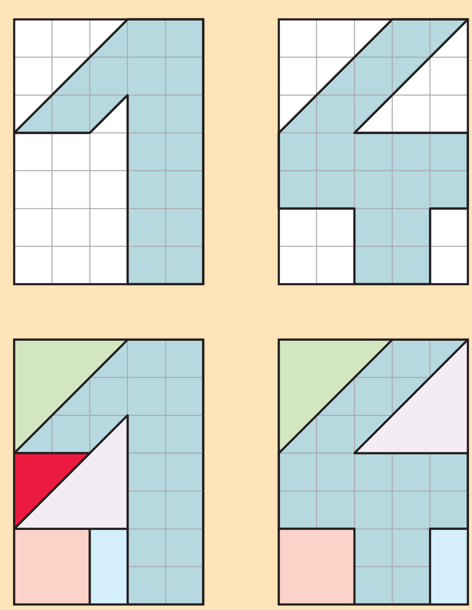
$V_1 = 12 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ (cm^3).

A piros elemet gondolatban a bejelölt vonal mentén kettévágjuk. A felső részt áthelyezve egy ugyanolyan méretű téglatestet kapunk, mint a zöld.
Vagyis a két elem azonos térfogatú.



2. példa

Alsó tagozatos gyerekeknek szemléltetőeszközként számjegyeket gyártanak 6 mm vastag falapokból. A mellékelt ábrán az 1 és a 4 tervezetét láthatod. Mindkettőt 5 cm-szer 7 cm-es lapokból fűrészelik ki. Melyik betűnél és mennyivel több a hulladék?



Megoldás

Hasonlítsuk össze a hulladékot átdarabolással! Az azonos nagyságú részeket azonos színnel jelöljük.
Az 1-es számjegy mellett megjelenik a pirossal jelzett rész is.
Vagyis itt több a hulladék.

A piros síkidom egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, a befogója 2 cm hosszúságú. A falap mindenütt 6 mm, azaz 0,6 cm vastagságú. Ezt a testet úgy képzelhetjük el, mint egy félbevágott téglatestet. Ezért a térfogata:

$V = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 0{,}6}{2} = 1{,}2\ (\text{cm}^3).$

Vagyis az 1-es számjegynél 1,2 cm³-rel több a hulladék.

Feladatok

1. Számítsd ki a téglatest térfogatát, ha az élei *a*, *b* és *c* hosszúságúak!

a) $a = 2{,}8$ cm, $b = 32$ mm, $c = 0{,}2$ dm;
b) $a = 45$ mm, $b = 8{,}2$ cm, $c = 0{,}05$ m;
c) $a = 12$ cm; $b = 1{,}2$ dm; $c = 0{,}12$ m;
d) $a = 3$ cm; $b = 9$ cm; $c = 27$ cm.

2. Mekkora a téglatest hiányzó élének a hossza?

a) $V = 2460\ \text{cm}^3$, $a = 10$ cm, $b = 6$ cm;
b) $V = 450\ \text{cm}^3$, $a = 8$ cm, $c = 9$ cm;
c) $V = 625\ \text{cm}^3$; $b = 5$ cm; $c = 25$ cm;
d) $V = 343\ \text{m}^3$; $b = 7$ m; $c = 700$ cm.

3. Számítsd ki a kocka térfogatát, ha az élei *a* hosszúságúak!

a) $a = 6{,}4$ m;
b) $a = 2{,}1$ mm;
c) $a = 25$ cm;
d) $a = 9$ dm.

4. Mekkora a kocka élhossza, ha az űrmértéke

a) 125 l;
b) 64 ml;
c) 121,67 dl;
d) 92,61 hl?

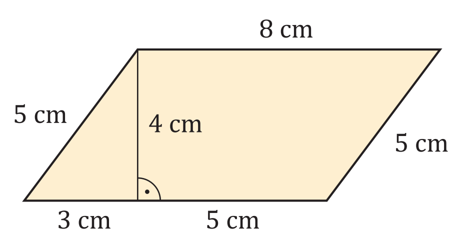
5. Ha a téglatestet az 51,2 cm²-es lapjával tesszük az asztalra, akkor 12 cm magas. Milyen magas, ha a 76,8 cm²-es lapját rakjuk az asztalra?

6. A 2. példában szereplő két számjegy közül melyiknek nagyobb a térfogata és mennyivel?

7. Elfér 800 liter víz az előző lecke 1. példájában szereplő fürdőkádban? Válaszodat számításokkal alátámasztva magyarázd el!

8. Paralelogramma keresztmetszetű, 2,4 méter hosszú vasrudakat szállítanak teherautóval. A paralelogramma adatait az ábráról olvashatod le.

a) Hány darab rudat rakhatnak fel a teherautóra, ha 2 m³-nél többet biztonsági okokból nem szállíthatnak?
b) Ezeket a rudakat le kell festeni. Mekkora a felülete egy ilyen rúdnak?



8. ÖSSZEFOGLALÁS

A következő 12 kérdéssel átismételheted a legfontosabb fogalmakat, képleteket, amelyeket a kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítással kapcsolatban eddig tudnod kell.

1. Egy egyenlő oldalú háromszög kerülete 264 m. Hány méter hosszú az oldala?
2. Egy paralelogramma két különböző oldalának hossza összesen 342 cm. Hány centiméter a kerülete?
3. Ha a deltoid 102 cm-es rövidebb oldala és a hosszabb oldala közötti eltérés 42 cm, akkor hány centiméter a kerülete?
4. Egy háromszög kerülete 2014 mm. Két oldalának hossza 777 mm és 999 mm. Hány milliméter a harmadik oldal hossza?
5. Egy négyszög minden oldala centiméterben mérve egész szám. Hány centiméter lehet maximálisan a leghosszabb oldala, ha a kerülete 1701 cm?
6. Olyan húrtrapézt rajzoltunk, amelynek három oldala is egyenlő. Van 630 cm-es és van 205 cm-es oldala is. Hány centiméter a kerületének az ötöde?
7. Egy deltoid mindkét átlója 38 cm hosszú. Hány cm^2 a területe?
8. Hány m^2 a területe a 23 m és 42 m befogóval rendelkező derékszögű háromszögnek?
9. Egy testet négy egybevágó trapéz és két különböző négyzet határol. Mennyi a lapok, élek, csúcsok számának szorzata?
10. Nyolc darab 9 cm élű kockát úgy rakunk egymás mellé, hogy középen marad egy 9 cm élű, kocka alakú lyuk. Az így kapott test térfogata hány cm^3-rel kevesebb, mint 6000 cm^3?
11. Nyolc darab 3 cm élű kockát úgy rakunk egymás mellé, hogy középen marad egy 3 cm élű, kocka alakú lyuk. Az így kapott test felszíne hány cm^2-es?
12. Egy 8 cm élű kockát két egyforma testre vágunk szét. Hány cm^3-es lesz az így kapott egyik test térfogata?

Feladatok

1. Mekkora az ábrán látható sokszögek kerülete? Mérj és számolj ügyesen!

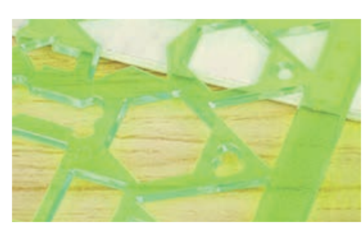
a) *b)* *c)* *d)* *e)* *f)*

2. Egy téglalap alakú kert oldalainak hossza 30 méter és 42 méter. Milyen hosszúságú kerítésre lesz szükség, ha egy 3 méter széles részt ki kell hagyni kapunak?

3. Vannak olyan műanyag sablonok, amelyek segítségével könnyen tudsz sokszögeket rajzolni. Hány centiméter hosszúságú vonal lesz a füzetedben, ha a sablon segítségével szabályos

a) háromszöget; *b)* négyszöget; *c)* hatszöget; *d)* nyolcszöget

rajzolsz, és mindegyik sokszög oldala 12 mm hosszúságú?



4. Egy 30 cm kerületű sokszög minden oldala egyenlő hosszúságú, és centiméterben kifejezve a hosszuk egész szám. Hány oldalú lehet a sokszög? Add meg az összes lehetőséget!

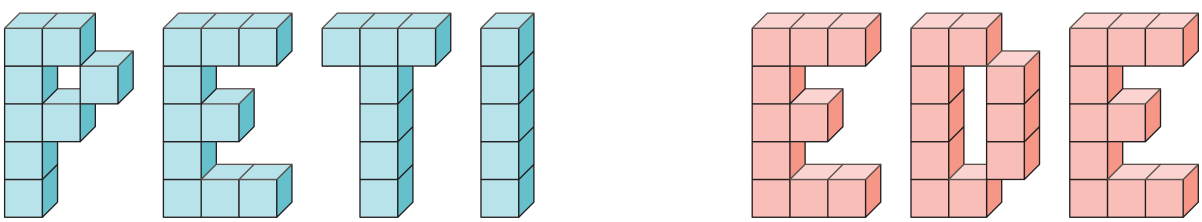
5. Töhötöm meghatározta egy négyzet, egy háromszög, egy szabályos háromszög és egy paralelogramma kerületét. Ezeket az eredményeket kapta: 342 cm, 352 cm, 344 cm, 345 cm. Töhötöm sajnos összekeverte az eredményeket, és már nem tudja, hogy melyik szám melyik síkidomhoz tartozik. Arra emlékszik, hogy minden síkidom minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám volt. Segíts megtalálni a helyes párosítást!

6. Határozd meg rövidebben!
a) Olyan paralelogrammát rajzoltunk, amelynek van 90°-os szöge.
b) Olyan paralelogrammát rajzoltunk, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.
c) Olyan trapézt rajzoltunk, amelynek minden szöge 90°-os, és két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.
d) Olyan trapézt rajzoltunk, amelynek bármelyik két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.

7. Hányféle téglatest építhető nyolc darab egyforma kockából?

8. Hogyan lehet egy kockát szétdarabolni
a) 8; *b)* 27; *c)* 20 kisebb kockára?

9. Peti kirakta a nevét kockákból. Ez megtetszett Edének is, aki szintén kirakta a nevét.



a) Melyikük használt fel több kiskockát a nevéhez?
b) Ha 1 cm élűek a kockák, akkor hány cm^2 a két fiú nevének a felszíne?
c) Ha 2 cm élűek a kockák, akkor hány cm^3 a két fiú nevének a térfogata?
d) Tervezd meg a KOCKA és GEOMETRIA szavakat kiskockákból összerakva! Színezd a szavak kiskockáit, hogy térbeli kockáknak látsszanak!

10. Add meg négyzetméterben és négyzetcentiméterben a következő mennyiségeket!
a) 230 dm^2; *b)* 4 000 000 mm^2; *c)* 0,002 km^2; *d)* 0,5 ha;
e) 72 dm^2; *f)* 240 000 mm^2; *g)* 0,0003 km^2; *h)* 0,01 a.

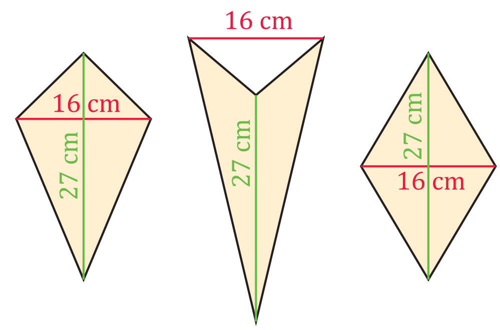
11. Keresd meg az egyenlőket!
44 m^2; 55 dm^2; 55 000 mm^2; 440 cm^2; 4400 dm^2; 0,44 km^2; 0,55 m^2; 5,5 ha.

12. Melyik síkidom területe nagyobb? Mennyivel?
a) A 12 cm-szer 6 cm-es téglalap vagy a 8,2 cm oldalú négyzet?
b) A 34 mm-szer 4 mm-es téglalap vagy a 16 mm-es és 17 mm-es befogójú derékszögű háromszög?
c) A 7,8 cm oldalú négyzet, vagy az 5 cm-szer 12,17 cm-es téglalap?
d) A 2 m-szer 6 m-es téglalap, vagy a 35 dm oldalú négyzet?

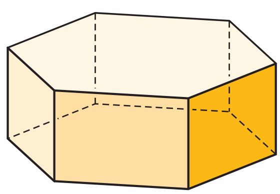
13. Egy deltoidot a két átlója négy derékszögű háromszögre vág. Ezek közül kettő egyenlőszárú, a szárak hossza 2,1 cm. A másik két derékszögű háromszögnek van 4,2 cm hosszúságú befogója.

a) A szöveg alapján készíts vázlatot a deltoidról!
b) Add meg a négy derékszögű háromszög területét!
c) Mekkora a deltoid területe?
d) Szerkeszd meg a deltoidot, majd a megfelelő mérések után add meg a kerületét!

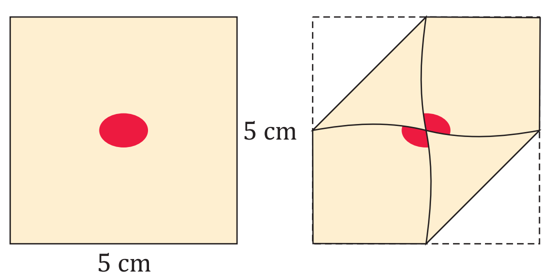
14. Mekkora az ábrán látható deltoidok és a rombusz területe?



15. A képen látható desszertes doboz alja és teteje egybevágó szabályos hatszög. A hatszög oldalai 8 cm hosszúak, a doboz magassága pedig 6 cm. Mekkora felületet kell körben a dobozra ragasztott címkével lefedni?



16. A lekváros papucs nevű sütemény készítésekor 5 cm oldalú négyzetekre vágjuk a kinyújtott tésztát. Ezeknek a közepébe egy kis lekvárt teszünk, és két szemközti csúcsát a négyzetnek behajtjuk középre. Mekkora területű az így elkészített lekváros papucsok alja?



17. Nagymama a kinyújtott tésztát 12 cm-es négyzetekre vágja. Mindegyik négyzet közepébe túrót tesz, majd a négyzet minden csúcsát behajtja középre. Az így elkészített túrós batyuknak mekkora területű az aljuk?

18. Add meg köbméterben és köbdeciméterben a következő mennyiségeket!

a) 230 000 cm^3; *b)* 48 000 cm^3;
c) 3400 mm^3; *d)* 130 000 mm^3.

19. Add meg olyan mértékegységgel a következő mennyiségeket, hogy a mérőszám kisebb legyen!

a) 1600 liter; *b)* 23 000 dl; *c)* 32 500 dl; *d)* 25 000 000 ml;
e) 230 000 cl; *f)* 17 320 dl; *g)* 1,2 liter; *h)* 221 500 000 ml.

20. A következő szöveget Milán a vasárnapi ebédről írta. Sajnos néhol elhibázta a mértékegységet. Javítsd a szöveget!
Anya az ötfős családnak készíti a húslevest, ezért a 6 dl-es fazekat vette elő. A villanytűzhely lapja 2750 dm² területű, ezért négy edény is kényelmesen elfér rajta. A rántott hús egy lapos tálon kerül majd az asztal közepére, amely kb. 2,5 m²-t foglal el. A két húgom a 36 cm oldalú, négyzet alakú szalvétákat hajtogatja, ezek kiterítve 12,96 dm² területűek. Az asztalra kerülnek a poharak is, amelyek térfogata 0,25 m³. Az ebéd végén kocka alakú krémes lesz a desszert, amelyek térfogata egyenként 216 mm³.

21. Hány liter víz van egy csordultig telt téglatest alakú akváriumban, amelynek a belső mérete: 32 cm-szer 55 cm-szer 40 cm?

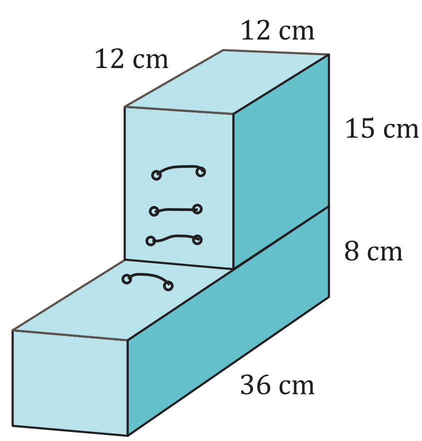
22. A nyomtató tintapatronja tégla alakú, oldalai 6 cm, 2,5 cm és 1,2 cm hosszúak. Hány ml a térfogata? Ha ez a patron 3200 Ft, akkor mennyibe kerülne 1 liter ilyen tinta?

23. A gízai nagy piramis, más néven Kheopsz-piramis térfogata körülbelül 2 500 000 m³.

a) Mekkora lenne egy ugyanekkora térfogatú 5 méter magas téglatestnek az alapja?
b) Ha 700 méter lenne ennek az 5 méter magas téglának az egyik alapéle, akkor mekkora lenne a harmadik él?
c) Hány futballpályát lehetne befedni 5 méter magasan a Kheopsz-piramis köveivel? Egy futballpálya mérete kb. 105 m · 70 m.

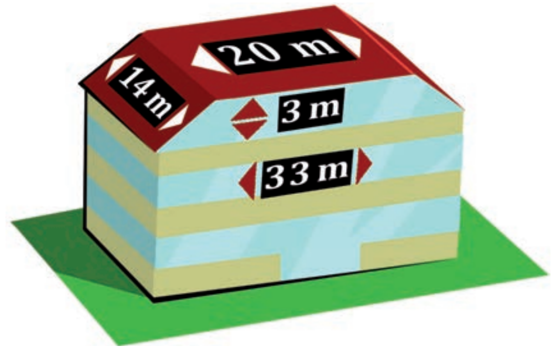
24. Egy emésztőgödör 3 m × 3 m × 2 m nagyságú. Mekkora tartályú szippantóautót kell hívni, ha 80%-ig van tele a gödör?

25. Egy hócipőt tekinthetünk két egymáson fekvő téglatestnek, ahol az egyik téglatest oldalai 12 cm, 36 cm és 8 cm, míg a másik téglatest oldalai 12 cm, 12 cm és 15 cm hosszúak. Hány liter folyadékkal tölthetünk meg egy hócipőt?



26. A Habzsi család úszómedencéje 6 méter széles, 9 méter hosszú és 1,2 méter mély. Mennyibe kerül feltölteni, ha 1 m³ víz ára 460 Ft, és a víz 85%-a után köbméterenként kell még 488 Ft csatornadíjat is fizetni?

27. Egy épület vázlatát mutatja a rajz. Az ábráról az adatok is leolvashatóak. Mekkora a tetőtér térfogata?



28. Egy vízelvezető árok keresztmetszete olyan trapéz, amely három szabályos háromszögre darabolható. Az árok alja 40 cm széles.

a) Szerkeszd meg az árok keresztmetszetét! Ami a valóságban 10 cm, az a rajzodon 5 mm legyen!

b) Számold ki a szükséges adatok megmérésével, hogy mennyi víz férne el az árok 12 méteres részében!

29. Az Óbudai Nyár programjaira színes, könnyen mozdítható, négy elemből álló bútorok készültek a Fő térre, melyből egy a képen is látható. Felülnézetben egy 90 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöggé lehet őket összeilleszteni. A belső, kék szabályos hatszög 45 cm oldalhosszúságú. A bútorok magassága is 45 cm.

a) Melyik a legnagyobb térfogatú a négy elem közül?

b) A hatszög középső elemének legyen a dm^3 a térfogata. Mekkora a négy elem térfogata összesen?

c) Ha a három egyforma elem közül az egyiknek b dm^3 a térfogata, akkor mennyi a négy elem térfogata összesen?

d) Az ábra alapján készítsd el kartonból a bútorokat szemléltető négy sokszöget. Illeszd össze őket többféleképpen is! Az összeállításaidat rajzold le vázlatosan olyan csoportosításban, hogy tengelyesen tükrös, illetve nem tengelyesen tükrös legyen.

30. A főváros egyik játszóterén egy mászókáról készült ez a fénykép. A két test mindegyikét 12 darab egybevágó, 140 cm oldalú szabályos ötszög határolja. Máté elhatározta, hogy elkészíti egy ilyen testnek az élvázát, amihez 7 cm hosszúságú hurkapálcadarabokat fog felhasználni.

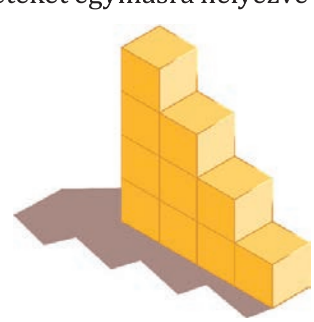
a) Hány centiméter hosszúságú hurkapálcát fog Máté összesen felhasználni?

b) Egy ötszög területe 33 700 cm^2. Hány négyzetméter egy ilyen test felszíne?

31. Egy téglalap alakú papírlap vastagsága 0,16 mm, a szélessége 21 cm, a hosszúsága pedig 30 cm. Képzeld el, hogy a papírt 1 cm^2-es négyzetekre vágod, és a négyzeteket egymásra helyezve egy négyzetes oszlopot építesz belőle.

a) Milyen magas lenne ez az oszlop?

b) Minimum hány darab ilyen papírra lenne szükség, hogy az oszlop magassága meghaladja a fél métert?



32. Egyforma kockákból építettük a képen látható lépcsőt. A felhasznált 10 kocka élei 5 cm hosszúságúak. Mekkora az építmény felszíne és térfogata?

V. Statisztika

A gyerekek szomorkásan bámulták az ablak mögötti semmit.

– Fel a fejjel. Négy bolygón jártunk 12 nap alatt, az annyi mint három naponta egy új hely. Érdemes volt a FérExszel jönni – szögezte le Gazsi.

– Kár, hogy indulunk haza, amikor van még egy pár hely, amit nem láttunk – toldotta meg Panni. – Jó lenne, ha még elmennénk valahová.

– Pár hely? A csillagok 17%-ának van bolygója, az nagyjából minden hatodik. Lenne hová menni – egészítette ki Attila. – Tudod hány katalógust böngésztünk át a hálón, amíg ezeket kiválasztottuk?

– Vigyázz! Ha véletlenszerűen ugrunk el valahová a térben, nagyon kicsi az esélye annak, hogy jó helyre jutunk. Nem számíthatunk arra, hogy egy csillagközi kíber űrflotta arra jár, és felvesz minket. Ennek nagyjából 0 az esélye, és ilyen csak a filmekben fordul elő – tette hozzá óvatosan Berta.

– Pedig izgalmas lenne. Gondoljatok bele, egy óriási katonai anyahajón hazamenni nem lenne utolsó dolog. Az egész hajónk elférne a dokk egyik sarkában és mindenki velünk foglalkozna – ábrándozott Panni.

Elindultak, és a véletlennek fikarcnyi szerepe sem volt abban, hogy gond nélkül álltak pályára a Hold körül.

A bás játék

A játékhoz legalább 2 ember kell, de akkor a legélvezetesebb, ha 4-6 játékos játszik. Két kockára lesz szükségetek, és figyelnetek kell arra, hogy az általatok dobott számokat a többiek ne láthassák meg. Használhattok a dobáshoz bögrét, de a két kezetek is megteszi. A dobott számok közül a nagyobbat (ha van) tegyétek előre a tízes helyi értékre, a kisebbiket hátra, az egyesek helyére. Tehát például a 4, 5 dobás eredménye mindig 54, a 3, 2 dobásé pedig 32. Különlegesek azok az esetek, amikor egyformákat dobtok. Az 11, ami 1-es bás, a 22, ami 2-es bás, ... és a 66, ami 6-os bás. A dobások értékei az itt megadott sorrend szerint nőnek:

31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21

A 21-es dobás kiemelt helyen áll, és minden dobásnál erősebb. Mindenkinek nagyobbat kell dobnia, vagy legalábbis mondania, mint az előző játékosnak. Egyetlen kivétel van: 21-re csak 21-et lehet újra mondani. Ha egy körnek 21-gyel van vége, akkor a következő kör az ellenkező irányba indul el.

A játék menete:

Tegyük fel, hogy négy játékos üli körbe az asztalt, Gazsi, Helén, Imola és Jakab. Gazsi kezd, és dob a kockákkal úgy, hogy a többiek ne lássák. Dobás után mond egy számot. Helénnek két lehetősége van.

a) Elhiszi: ekkor ő dobhat, és nagyobbat kell dobnia, illetve mondania, majd halad tovább a kör Imola felé.

b) Nem hiszi el: ekkor Gazsinak meg kell mutatnia, mit dobott. Ha hazudott, akkor ő kap egy hibapontot, ha igazat mondott, akkor Helén.

Akinek 3 hibapontja lesz, az kiesik. Az győz, aki utolsónak marad.

Lássunk egy példát:

Gazsi kezd, dob, és azt mondja, 45. Erre azonnal kap egy hibapontot, mert ilyen érték nincs, 54-et kellett volna mondania.

Helén kezd: dob, és azt mondja, 61.

Imola jön: „Elhiszem” – mondja, mire Helén összerázza a kockákat, és átadja Imolának. Dob, de Imola dobása csak 52, ő viszont rezzenéstelen arccal közli, hogy 2-es bás.

Jakab jön: „Elhiszem” – mondja, mire Imola sóhajtva összerázza a kockákat, és átadja neki. Jakab dob, és azt mondja, 21.

Gazsi jön: „Nem hiszem el!” – mondja, mire Jakab mosolyogva mutatja meg a 21-et, a 2-est és az 1-est a kockákon, és Gazsi kap egy hibapontot. A következő játékot Gazsi kezdi, hiszen ő a soros, és megfordul a kör iránya, mert 21-gyel fejeződött be.

Játsszatok néhány partit! Mérlegeljétek, hogy mikor érdemes dobni, mikor hinni és mikor kételkedni!

Gazsi	Helén	Imola	Jakab	Gazsi
Új játék		Elhiszem	Elhiszem	Nem hiszem
Dobásai: 4 és 5	Dobásai: 1 és 6	Dobásai: 2 és 5	Dobásai: 1 és 2	Új játék
45	61	2-es bás	21	
45-öt nem lehet mondani: 1 hibapont		Ha Imola nem hitte volna el, akkor hibapontot kapott volna, mert Helén az igazat mondta.	Ha Jakab nem hitte volna el, akkor nyer, mert Imola nem mondott igazat.	Gazsi veszít, mert Jakab igazat mondott. 1 hibapont

Középső játék

Hasonlít az egyszám játékhoz, de egy kicsit több számolással jár. Az osztály tagjai felírnak egy 1 és 100 közötti egész számot. Amikor mindenki kész van, összegyűjtik a számokat, például a tanár felírja azokat a táblára. Nagyság szerint sorba állítják a számokat. Ha a tanulók száma páratlan, akkor az a tanuló nyer, aki a középső számot írta. Ha a tanulók száma páros, akkor a két középső számot író tanuló nyer. Ha többen írják ugyanazt a nyerő számot, akkor többen is nyerhetnek.

Például, ha 25 gyerek jár az osztályba és a felírt számok: 1, 2, 45, 56, 5, 54, 35, 67, 3, 53, 4, 43, 4, 5, 70, 87, 7, 56, 4, 45, 35, 65, 6, 3, 5.

Egy kényelmes rendezési lehetőséget mutat a mellékelt táblázat. Pirossal kiemeltük a nyerő számot, ami most a 35. Ketten is írták ezt a számot, tehát ketten is nyernek. Ha egy 26. gyerek is volna az osztályban, aki 10-est írna, akkor a 10 és a 35 lenne a két középső szám, tehát összesen 3 gyerek nyerne.

Tízesek	Egyesek
0	1, 2, 5, 3, 4, 4, 5, 7, 4, 6, 3, 5
1	
2	
3	**5**, **5**,
4	5, 3, 5
5	6, 4, 3, 6
6	7, 5,
7	0
8	7
9	

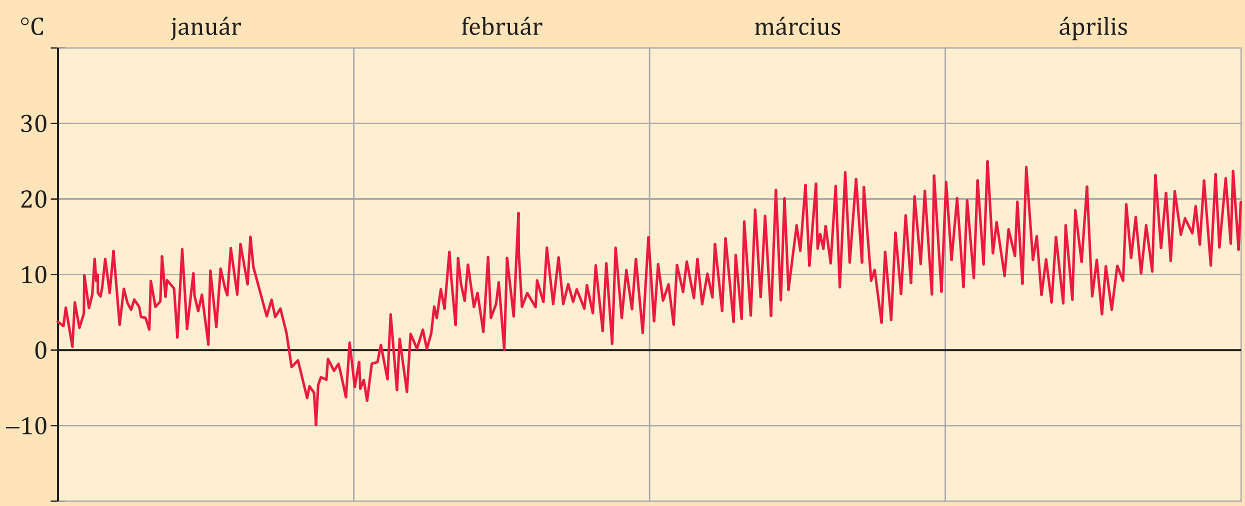
2. GRAFIKONOK, DIAGRAMOK, ÖSSZEFÜGGÉSEK

A mennyiségek közti összefüggéseket grafikonnal tudjuk szemléletessé tenni. A derékszögű koordináta-rendszerben rajzoljuk a grafikonokat, és a tengelyeken jelenítjük meg az összetartozó mennyiségeket.
A koordináta-rendszert sokszor **Descartes-féle koordináta-rendszernek** nevezzük.
Az adatok ábrázolására nagyon változatos diagramokat is használunk.

René Descartes (ejtsd: röné dékárt) (1596–1650) francia filozófus, matematikus és természettudós, katolikus nemesi családban született. A jezsuita kollégium után jogi diplomát szerzett, majd matematikát és erődépítészetet tanult. Sokat utazott. Többek között járt Lengyelországban, Magyarországon és Csehországban is. Meg akarta magyarázni a természet minden jelenségét, tanulmányaiban írt például a légköri jelenségekről, a fénytörésről és a geometriáról is. Descartes idejében a matematika már fejlett tudomány volt, és ebben neki is jelentős szerep jutott. Az ő nevéhez fűződik, hogy a matematikai összefüggések ábrázolására a koordináta-rendszert ajánlotta.

1. példa

Szekszárdon 2014-ben az első négy hónapról egy automata hőmérő a következő hőmérsékleti diagramot rajzolta. (Forrás: http://www.csatolna.hu/archive/Beka/korabbi/korabbi.shtml)



a) Miért ennyire „cikk-cakkos” az ábra?
b) Melyik hónapban mérték a legmagasabb hőmérsékletet?
c) Márciusban mennyi volt a hőmérsékleti minimum?
d) Melyik hónapokban volt fagypont alatti hőmérséklet is?

Megoldás

a) Rövid intervallumon kell egy hónapot megjeleníteni. A hőmérséklet éjszakára lehűl a nappalihoz képest. Ezeket a változásokat mutatja az ábra ezekkel a „hirtelen” ugrásokkal.
b) A piros görbe áprilisban ugrik a legmagasabbra, vagyis ekkor mérték a legmagasabb hőmérsékletet.

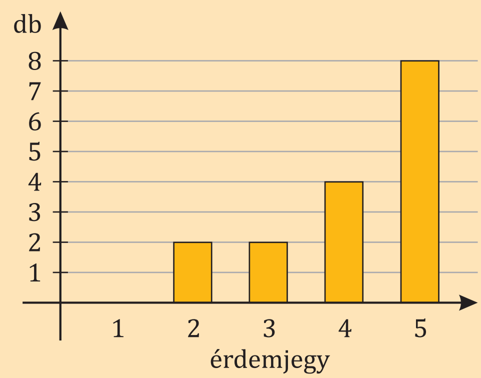
c) Az ábráról pontos értéket nem tudunk leolvasni, de azt látjuk, hogy a görbe több helyen is megközelíti a nulla szintet. Körülbelül 2-3 fok lehet ez a hőmérsékleti minimum.
d) A görbe január végén és február elején van a nulla szint alatt, vagyis ebben az időszakban volt a hőmérséklet a fagypont alatt.

2. példa

A hatodikos csoport megkapta a matematikadolgozatát. 8 darab ötös, 4 darab négyes, 2 darab hármas és 2 darab kettes érdemjegy született. Ábrázoljuk az elért eredményeket diagramon!

Megoldás

Mivel egyes érdemjegy nem volt, ezért az oszlopdiagramon erre a helyre nem rajzoltunk oszlopot. Az oszlopdiagramon könnyen tudjuk az adatokat egymáshoz viszonyítani.
Például az ötösökhöz tartozó oszlop kétszer olyan magas, mint a négyesekhez tartozó oszlop. Azaz kétszer annyi ötös született, mint négyes.



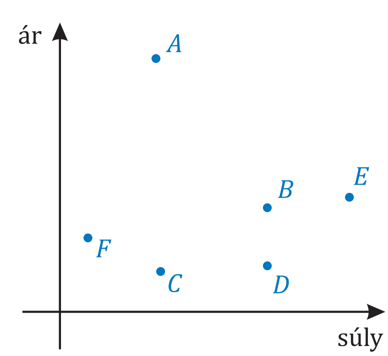
KUTATÓMUNKA

Keress újságokban, katalógusokban grafikonokat, diagramokat! Vágd ki, és hozd be matematikaórára!

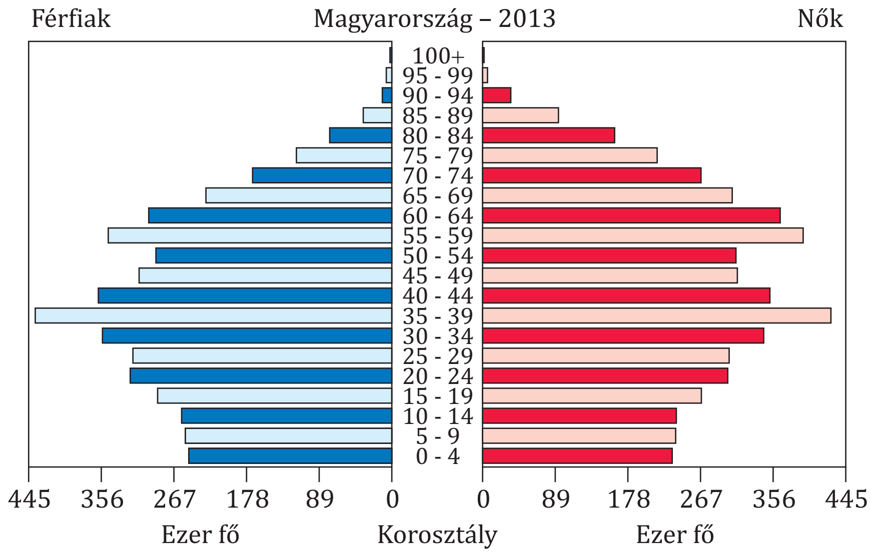
Feladatok

1. Hat különböző helyen őrölt diót vásároltunk. A hat csomag árát és súlyát mutatja a grafikon. Minden pont a koordináta-rendszerben egy-egy konkrét csomagra vonatkozik. Válaszolj a következő kérdésekre, annak ellenére, hogy a tengelyeken nem látod az értékeket! Döntéseidhez használhatsz vonalzót!

a) Melyik a legolcsóbb csomag?
b) Melyik a legnehezebb?
c) A hat között van-e azonos súlyú?
d) Vannak-e olyanok, amelyekért ugyanannyit kellett fizetni?
e) Az *A* és *D* csomag közül melyiket gondolod jobb vételnek?
f) A *C* és a *D* közül szerinted melyiket érdemes inkább megvenni?
g) Vannak-e olyan csomagok, amelyek egyformán jó vételnek számítanak?



2. A grafikonon Magyarország korfája látható.



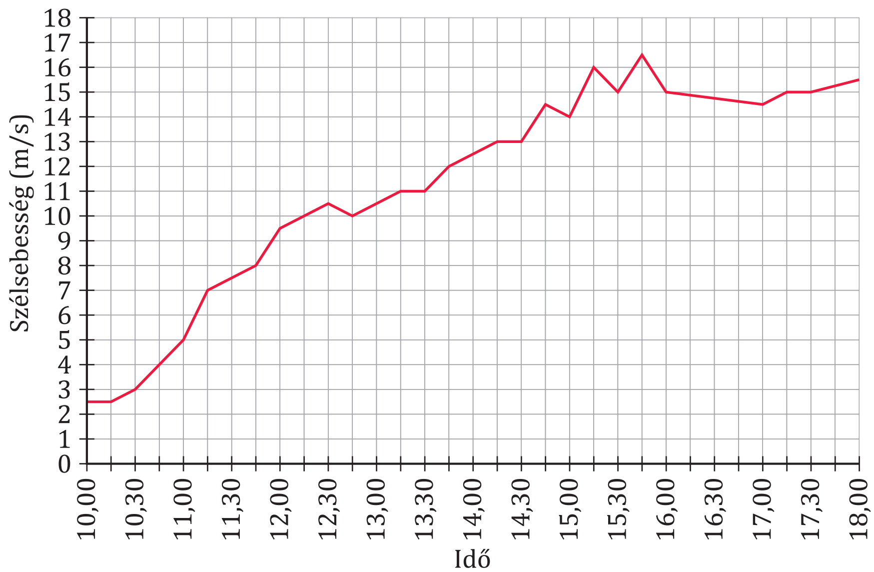
a) Keresd meg a „fa” törzsén a te korosztályodat!
b) Hány gyerek élt 2013-ban Magyarországon, aki veled azonos korosztályba tartozik?
c) Melyik korosztály a legnépesebb?
d) A fa nem szimmetrikus a törzsére. Ez mit jelent a lakosságra nézve?

3. A táblázat a leggyakoribb keresztneveket mutatja 2013-ban. Tudjuk, hogy 88 700 gyermek született ebben az évben Magyarországon.

2014. 01. 01-én	Férfinevek	2013-ban születettek első keresztneve	Női nevek	2013-ban születettek első keresztneve
1.	Bence	1667	Hanna	1818
2.	Máté	1372	Anna	1169
3.	Levente	1250	Jázmin	1046
4.	Ádám	1150	Luca	787
5.	Dávid	1075	Emma	783
6.	Dominik	998	Nóra	763
7.	Dániel	986	Lili	728
8.	Balázs	950	Zsófia	707
9.	Milán	894	Zoé	672
10.	Gergő	835	Csenge	661

a) Az ebben az évben született gyerekek hányadrésze kapta a 10 leggyakoribb nevet?
b) Készíts oszlopdiagramot a 4 leggyakoribb fiú- és a 4 leggyakoribb lánynévről! Az adatokat kerekítsd százas pontosságra!

4. A Balatonon a vitorlázók és a fürdőzők biztonsága érdekében 12,5 $\frac{m}{s}$-s szélsebességtől elsőfokú viharjelzés, 16,6 $\frac{m}{s}$ felett pedig másodfokú viharjelzés lép életbe. A következő grafikon a tónál elhelyezett szélsebességmérő berendezésének adatait mutatja.



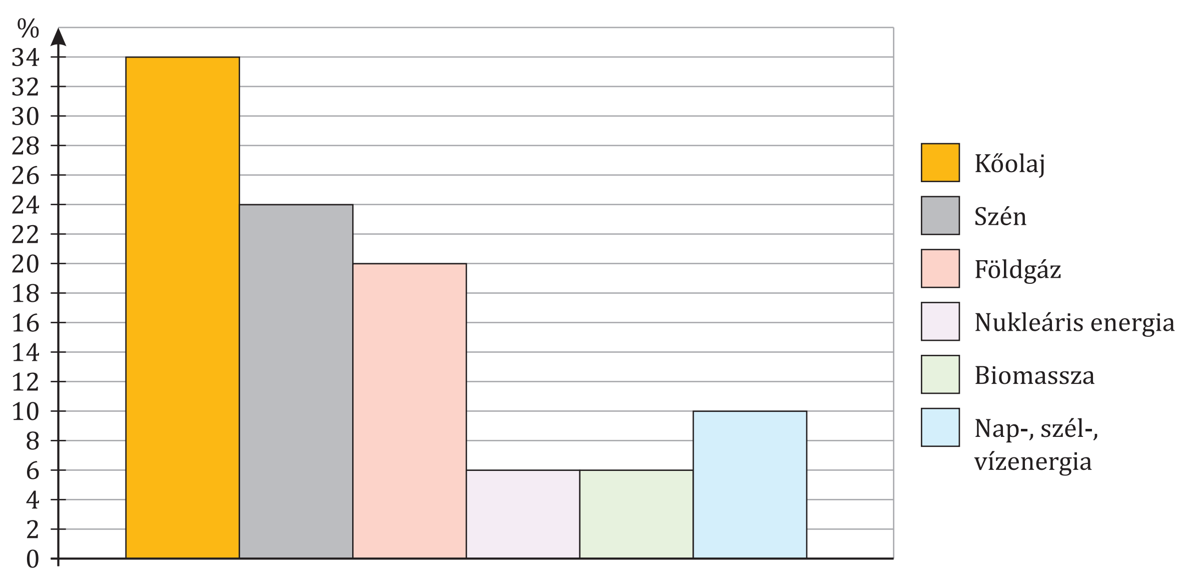
a) A vizsgált időszakban hány percig volt elsőfokú viharjelzés?

b) A vizsgált időszakban hány percig volt másodfokú viharjelzés?

c) Mikortól nem kölcsönözhetőek a vízi biciklik, ha egy rendelet szerint másodfokú viharjelzés esetén már nem tartózkodhatnak a tavon?

d) Mikor indul el a Vízi család vitorlással a part felé, ha reggel megbeszélték, hogy az elsőfokú viharjelzésig lesznek a vízen?

5. Értelmezd az ábrát! Rendezd táblázatba a leolvasható adatokat! Melyik az a három energiahordozó, amelyik együtt a világ energiafogyasztásának több mint háromnegyedét adta 2000-ben?



A világ energiafogyasztásának forrásai 2000-ben

1. példa

A táblázat a Toldi első énekében előforduló betűk számát tartalmazza. Az adatok összeszámlálásához és a műveletek elvégzéséhez zsebszámológépet, illetve a mobiltelefon számológépét is használtuk. (A kettős betűket külön számoltuk, azaz például a táblázatban az sz egy darab s-et és egy darab z-t jelent.)

a	á	b	c	d	e	é
351	123	75	33	84	287	128
f	g	h	i	í	j	k
37	132	71	155	13	54	156
l	m	n	o	ó	ö	ő
225	127	233	129	20	44	17
p	q	r	s	t	u	ú
35	0	166	223	217	27	28
ü	ű	v	w	x	y	z
15	6	89	0	0	105	141

a) Hány magán- és hány mássalhangzó van az első énekben?
b) A betűk hányadrésze magán-, illetve mássalhangzó? Írjuk fel százalékos alakban is.
c) Ábrázoljuk a magán- és mássalhangzók számát oszlopdiagramon!

Megoldás

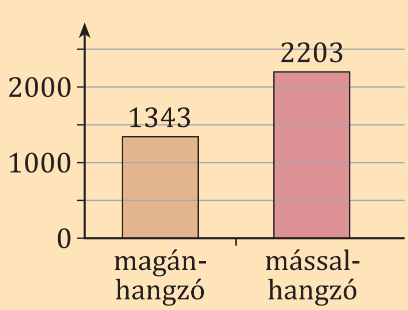
a) Össze kell adni a táblázat megfelelő elemeit.

Magánhangzó	Mássalhangzó	Összesen
1343	2203	3546

b) A betűk $\frac{1343}{3546} \approx 0{,}3787$ része magánhangzó. A betűk körülbelül 37,87%-a magánhangzó.

A betűk $\frac{2203}{3546} \approx 0{,}6213$ része mássalhangzó. A betűk körülbelül 62,13%-a mássalhangzó.

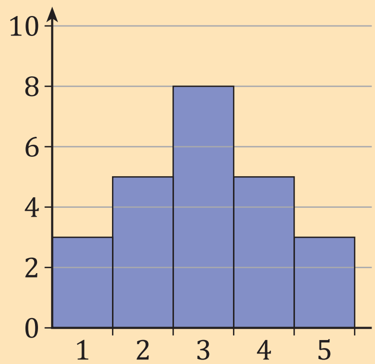
c) Az ábrázolásnál vegyük fel a vízszintes tengelyen a magánhangzókat és a mássalhangzókat. Rajzolhatjuk például úgy, hogy az első oszlop körülbelül 13-14 milliméter, a második 22 milliméter magas lesz. Ekkora adatok esetén ez elegendő pontosság.



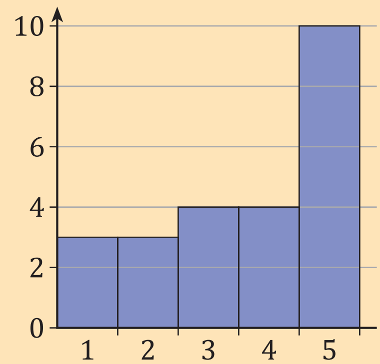
2. példa

Az iskola négy hatodik osztályában ugyanazt a felmérőt íratták, majd ábrázolták a kapott osztályzatok darabszámát.

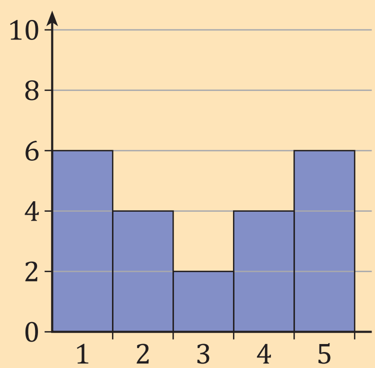
A 6. a eredményei:



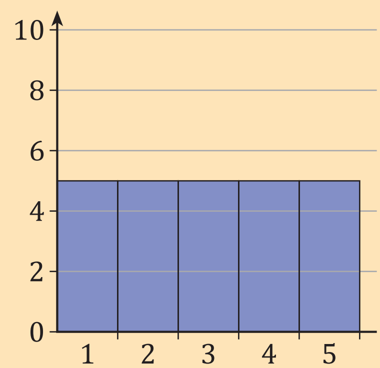
A 6. b eredményei:



A 6. c eredményei:



A 6. d eredményei:



a) Rendeljük a felsorolt tulajdonságokat az egyes grafikonokhoz: állandó, egycsúcsú, ferde, kétcsúcsú, szimmetrikus! Ugyanazzal a tulajdonsággal több grafikon is rendelkezhet.
b) Hány gyerek jár az egyes osztályokba?
c) Számítsuk ki az osztályátlagokat!
d) Mely esetekben lehetne számolás nélkül meghatározni az átlagot?
e) Melyik osztályba szeretnél járni?

Megoldás

a) A 6. a grafikonja egycsúcsú, szimmetrikus.
A 6. b grafikonja egycsúcsú, ferde.
A 6. c grafikonja kétcsúcsú, szimmetrikus.
A 6. d grafikonja állandó, szimmetrikus.

b) és *c)* A két kérdésre egyetlen táblázatban adjuk meg a válaszokat. A számolást csak a 6. a esetében részletezzük, a többi osztálynál hasonlóan számolhatunk.
A jegyek összege a 6. a-ban 3 db egyes, 5 db kettes, 8 db hármas, 5 db négyes és 3 db ötös, azaz

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 72; \quad \bar{x} = \frac{72}{24} = 3.$$

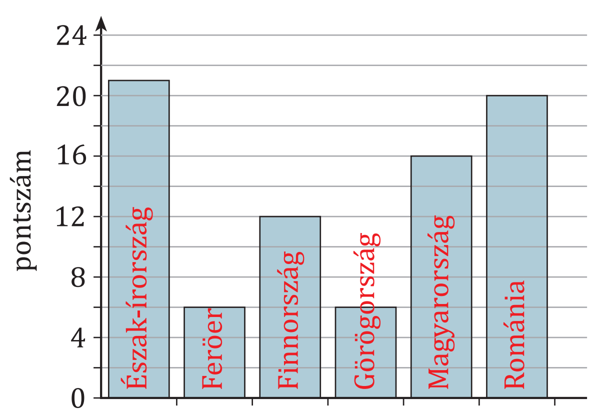
	Osztályzatok					Tanulók száma	Jegyek összege	Átlag
	1	2	3	4	5			
6. a	3	5	8	5	3	24	72	3
6. b	3	3	4	4	10	24	87	3,625
6. c	6	4	2	4	6	22	66	3
6. d	5	5	5	5	5	25	75	3

d) A szimmetrikus esetekben az átlag mindig a középső elem, hiszen az ettől vett pozitív és negatív irányú eltérések kiegyenlítik egymást.

e) Erre nincs matematikai válasz, mindenki szabadon dönthet.

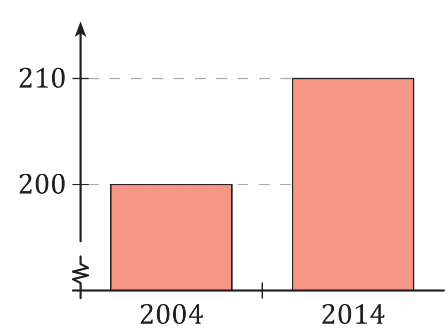
Feladatok

1. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



a) Melyik ország csapata szerezte a legtöbb pontot?
b) Hányadik lett Magyarország?
c) Hány pontot szerzett Görögország?
d) Keresd meg a térképen a felsorolt országokat!
e) Miről készült a táblázat?

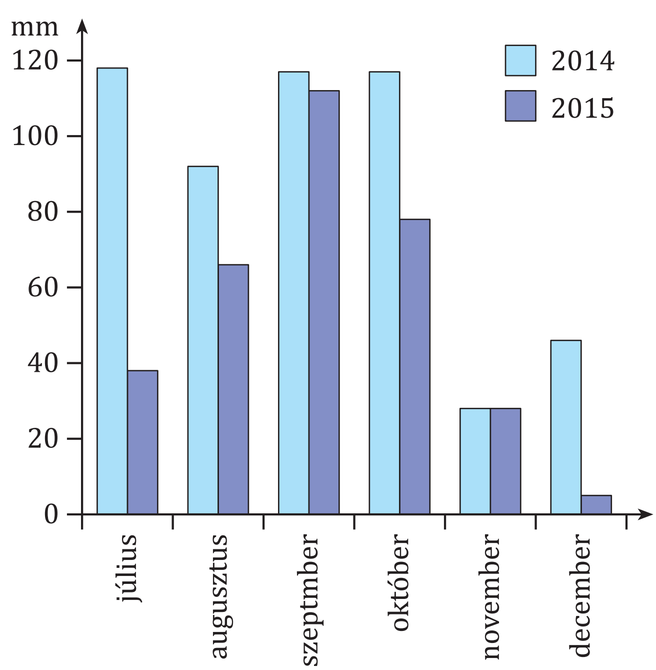
2. A grafikon a tanulók által kötött biztosítások számát ábrázolja 2004-ben és 2014-ben. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz!
a) A biztosítások száma körülbelül kétszeresére nőtt.
b) A biztosítások számának változását látjuk 10 év alatt.
c) Az iskolába járó fiúk és lányok számát láthatjuk.
d) A biztosítások száma körülbelül 5%-kal nőtt.
Beszéljétek meg a tanulságokat!



3. Készíts a 2016-os olimpia éremtáblázatának 12 sora alapján oszlopdiagramot!

Ország	Aranyérem	Ezüstérem	Bronzérem
Egyesült Államok	46	37	38
Nagy-Britannia	27	23	17
Kína	26	18	26
Oroszország	19	18	19
Németország	17	10	15
Japán	12	8	21
Franciaország	10	18	14
Dél-Korea	9	3	9
Olaszország	8	12	8
Ausztrália	8	11	10
Hollandia	8	7	4
Magyarország	8	3	4

4. A diagram a 2014 és 2015 második fél évében mért havi csapadékmennyiségeket mutatja.



a) Melyik év második fele volt csapadékosabb?
b) Melyik hónapban volt a legkisebb, illetve a legnagyobb a különbség a 2014-ben és a 2015-ben lehullott csapadék mennyisége között?
c) Körülbelül hány mm csapadékkal esett kevesebb 2015-ben? Meg lehet mondani a különbséget pontosan?

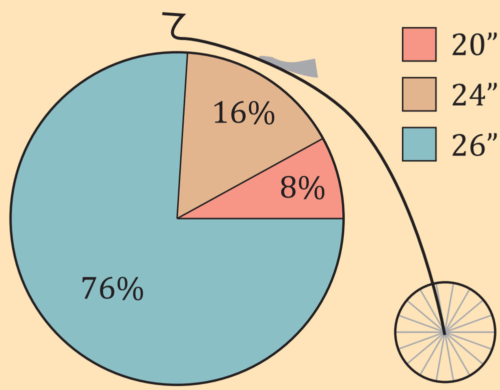
4. KÖRDIAGRAM

Van amikor szemléletesebb, ha nem oszlop, hanem kör alakú diagramon, röviden **kördiagram**on szemléltetjük az adatokat.
Nemcsak az adatok egymáshoz viszonyított arányát, hanem az egyes részek egészhez viszonyított arányát is jól lehet szemléltetni ilyen ábrán. A diagramon szereplő adatokat gyakran százalékos alakban adjuk meg.

Vigyázz! Ha tudjuk, hogy az osztályban a fiúk és a lányok aránya 1 : 1, akkor ebből még nem tudjuk megmondani, hogy hányan vannak az osztályban. Lehet például 10 fiú és 10 lány, de 14 fiú és 14 lány is.
Ha az adatok száma nem ismert, akkor pusztán a kördiagramon feltüntetett arányokból nem lehet következtetni az egyes esetek számára.

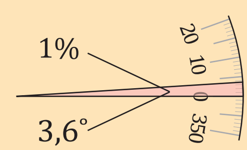
1. példa

A Tisza-parti kölcsönzőben összesen 50 darab, háromféle kerékméretű, 20, 24 és 26 colos biciklit tartanak. Olvasd le a diagramról, hogy melyik méretű bicikliből hány darab van a kölcsönzőben! Számold ki az egyes körcikkek középponti szögét is.



Megoldás

A kör egy százaléka az $\frac{360°}{100}$ = 3,6°-os középponti szögű körcikk.



Foglaljuk táblázatba!

	Százalék (%)	Számítás menete	Kerékpárok száma (db)	Középponti szögek
Összes kerékpár	100		50	
Egy darab kerékpár	2		1	
20”-os kerékpár	8	50 · 0,08 = 4	4	8 · 3,6° = 28,8°
24”-os kerékpár	16	50 · 0,16 = 8	8	16 · 3,6° = 57,6°
26”-os kerékpár	76	50 · 0,76 = 38	38	76 · 3,6° = 273,6°

A különböző méretű kerékpárokból 4 db, 8 db és 38 db volt a kölcsönzőben.
A középponti szögek: 28,8°, 57,6°, 273,6°.

2. példa

Az iskolai használtelem-gyűjtőedényből, amikor kiürítették, a következő típusú és darabszámú elem került elő:

Készíts kördiagramot!

Mekkora körcikk tartozik egy-egy elemtípushoz?

A képen látható elemek közül melyik nem szerepel a táblázatban?

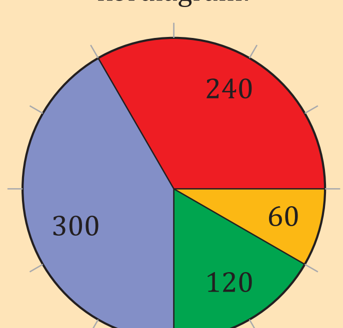
elem típusa	darabszám
AAA	240
AA	300
9 V-os elem	120
bébielem	60

Megoldás

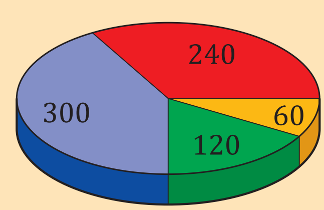
Ahhoz, hogy megállapítsuk, az egyes típusú elemekhez mekkora körcikket kell rajzolnunk, szükségünk van arra, hogy a teljes kör hány darabot szemléltet. 240 + 300 + 120 + 60 = 720.
Tehát összesen 720 elem volt a gyűjtőedényben.
Az egyes részek arányaival kiegészítettük a megadott táblázatot.
A részekhez tartozó körcikkek szögeit az arányok ismeretében már kiszámolhatjuk. Például az AAA elemekhez a kör harmada tartozik. A teljes kör 360°-os, ennek harmada 120°.
Hasonlóan számolható ki a többi szög is. A szögmérőnkkel felmérhetjük ezeket, egyiket a másik után.
A részeket a jobb szemléltetés végett ki szoktuk színezni.

Elem típusa	Darabszám	Arány	Közös nevezőjű törttel	Szög
AAA	240	$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$	$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$	$360°\cdot\frac{4}{12}=120°$
AA	300	$\frac{300}{720}=\frac{5}{12}$	$\frac{300}{720}=\frac{5}{12}$	$360°\cdot\frac{5}{12}=150°$
9 V-os elem	120	$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$	$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$	$360°\cdot\frac{2}{12}=60°$
bébielem	60	$\frac{60}{720}=\frac{1}{12}$	$\frac{60}{720}=\frac{1}{12}$	$360°\cdot\frac{1}{12}=30°$

kördiagram:



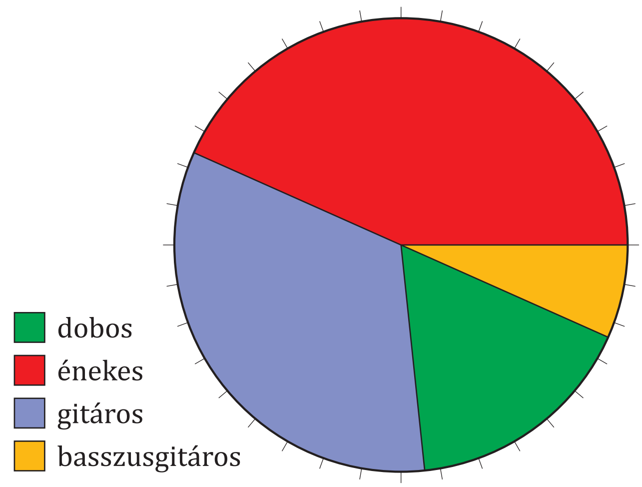
térbeli kördiagram (tortadiagram)



A képen a legnagyobb, a D jelű góliát elem nem szerepel a táblázatban.

Feladatok

1. Megkérdeztek 30 gyereket, hogy mik szeretnének lenni egy rockegyüttesben, és a válaszokat kördiagramon ábrázolták.

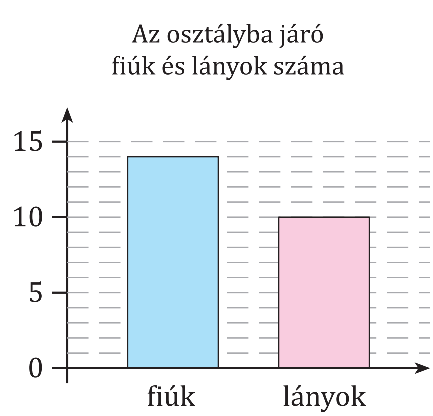


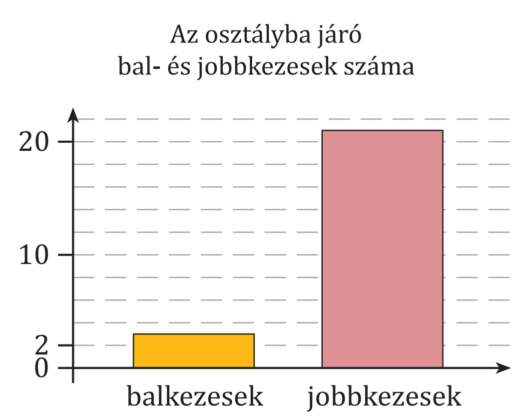
a) A kör hányadrésze tartozik az énekesekhez? Hányan akarnak énekesek lenni?
b) A kör hányadrésze tartozik a basszusgitárosokhoz? Hányan akarnak basszusgitárosok lenni?
c) Hány gyerekkel kevesebb akar dobolni, mint gitározni?
d) Készíts az adatokból oszlopdiagramot!

2. Az osztályban félévkor 7 tanuló jeles, 4 jó, 8 közepes és 5 elégséges volt nyelvtanból. Szemléltesd ezeket az adatokat oszlop- és kördiagramon is!

3. Matyi a képen látható vicces pólóban ment suliba. Készíts neki egy kördiagramot a pólóján szereplő adatok alapján!

4. Készíts kördiagramot az oszlopdiagramok adatai alapján!





Készítsd el a diagramokat a saját osztályod adatai alapján is!

5. A német futballbajnokság első három helyezettje 30 forduló után a következő volt a 2015/16-os idényben.

	Csapatok neve	Győzelem	Döntetlen	Vereség	Gólarány
1	Bayern München	25	3	2	72 : 14
2	Dortmund	22	5	3	73 : 30
3	Leverkusen	15	6	9	47 : 33

Készíts mindegyik csapathoz kördiagramot, amelyiken a győzelmeket, a döntetleneket és a vereségeket szemlélteted!

a) Mekkor középponti szög tartozik egy fordulóhoz?

b) Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes csapatok győzelmeihez, döntetleneihez és vereségeihez?

Tesztfeladatok

1. Hány százalékot szemléltet egy 36°-os középponti szögű körcikk?
A: 36%; B: 129,6%; C: 10%; D: Nem lehet kiszámolni.

2. Mekkora a középponti szöge annak a körcikknek, amelyik 10%-os részt szemléltet?
A: 10°; B: 18°; C: 36°; D: 100°.

3. Mekkora a középponti szöge annak a körcikknek, amelyik 50%-os részt szemléltet?
A: 50°; B: 100°; C: 180°; D: 360°.

4. Egy 24 fős osztályban 9 fiú van és 15 lány. Mekkora középponti szögű körcikk szemlélteti a fiúkat egy kördiagramon?
A: 135°; B: 24°; C: 225°; D: Nem lehet kiszámolni.

5. Egy 24 fős osztályban 9 fiú van és 15 lány. Mekkora középponti szögű körcikk szemlélteti a lányokat egy kördiagramon?
A: 135°; B: 24°; C: 225°; D: Nem lehet kiszámolni.

6. Az eladott autók száma típusonként: Batmobil 12; Időgépautó 15. Hány százalékos rész szemléltetné a Batmobilokat egy kördiagramon?
A: ≈ 44,4%; B: ≈ 22,2%; C: ≈ 88,8%; D: ≈ 155,6%.

7. Az iskola tanulóinak 2%-a vörös, 29%-a szőke, 54%-a barna és 15%-a fekete hajú. Hányan járnak az iskolába?
A: 100; B: 200; C: 248; D: Nem lehet kiszámolni.

Példa

Egy piros, egy fehér és egy zöld szalagból háromszínű lobogót varrunk fel a zászlórúdra. Hányfélét tudunk készíteni, ha mindegyik csíkból csak egyet használunk a zászlóhoz? Soroljuk fel az összes lehetőséget!

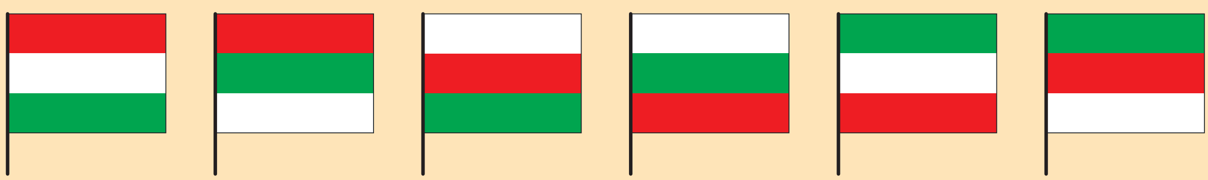
a) Ha véletlenszerűen választjuk a szalagokat, akkor mekkora az esélye, hogy magyar zászlót sikerül csinálnunk?

b) Mekkora ez az esély, ha csak összevarrjuk a csíkokat, de nem tesszük azokat a rúdra?

c) Mekkora a magyar zászló esélye, ha minden színű csíkból sok van, és ugyanabban a zászlóban azonos színű csíkok is lehetnek?

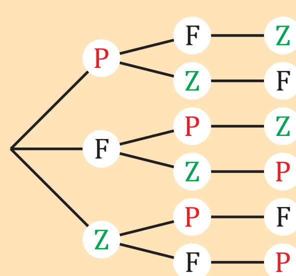
Megoldás

a) Soroljuk fel a színeket fentről lefelé haladva. Ha a felső csík piros, akkor a középső és az alsó csík fehér és zöld vagy zöld és fehér. Hasonlóan tovább: PFZ, PZF, FPZ, FZP, ZFP, ZPF.

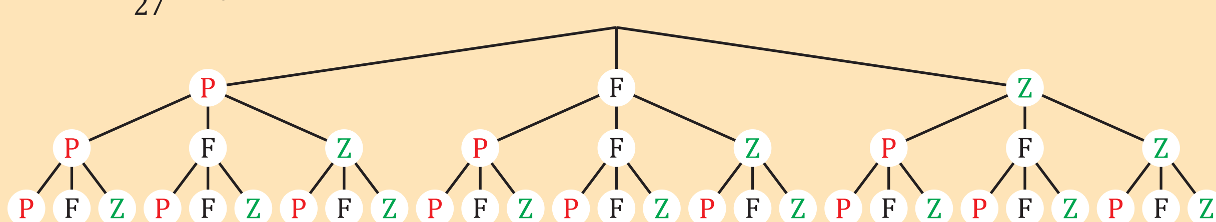


A legfelső csík színét 3 közül választhatjuk, a második csík már csak kétféle színű lehet, a harmadik pedig egyféle. Ez $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség. Mindegyik zászlónak ugyanakkora az esélye, azaz $\frac{1}{6}$.

b) Ha nem tesszük azokat a rúdra, akkor PFZ és ZFP ugyanaz, hiszen megfordítható a zászló. Hasonlóan PZF = FZP, valamint FPZ = ZPF. Három különböző zászló létezik, tehát a magyar zászló esélye $\frac{1}{3}$. Úgy is mondhattuk volna, hogy csak a középső csík színe számít, amely háromféle lehet, az esély $\frac{1}{3}$.



c) $3 \cdot 3 \cdot 3$-féle lehet, összesen 27. Ha mindegyiknek ugyanakkora az eshetősége, akkor a magyar zászlóra $\frac{1}{27}$ esély van.



A *b)* és *c)* pontban fadiagramot készítettünk.

Feladatok

1. Az érik szó betűiből készítsd el az összes
a) kétbetűs „szót”;
b) hárombetűs „szót”;
c) négybetűs „szót”!
Minden betűt egyszer használhatsz! Húzd alá az értelmes szavakat!
Nézz utána, hogy mi az anagramma!
Próbáljatok a saját nevetekből anagrammát készíteni.

2. Készíts az 1, 2, 3, 4 számkártyákból négyjegyű számokat!
a) Hány különböző négyjegyű számot lehet készíteni?
b) A négyjegyű számok hányadrésze lesz páros?
c) A négyjegyű számok hányadrésze lesz hárommal osztható?
d) A négyjegyű sámok hányadrésze lesz néggyel osztható?

3. Készíts az 0, 1, 2, 3 számkártyákból négyjegyű számokat!
a) Hány különböző négyjegyű számot lehet készíteni?
b) A négyjegyű számok hányadrésze lesz páros?
c) A négyjegyű számok hányadrésze lesz hárommal osztható?
d) A négyjegyű számok hányadrésze lesz néggyel osztható?

4. Hányféle sorrendben lehet megenni a paradicsomlevest, a rántott húst és a túrógombócot?

5. Berta meg akarja látogatni Szofit Kétegyházán, de közben be kell ugrania Gyulán a nagymamához. Békéscsabáról autóval, vonattal, busszal vagy biciklivel mehet Gyulára, de onnan Kétegyházára továbbmenni csak autóval, busszal vagy biciklivel érdemes. Hányféle módon teheti meg az utat Békéscsabáról Kétegyházára?

6. A Formula 1-es versenyen 16 autó indult. A verseny során 6 műszaki hiba miatt, 2 baleset miatt kiesett, és további 2 versenyzőt szabálytalanság miatt kizártak.
a) Hányféle sorrendben futhattak be a versenyben maradt autók?
b) Hányféle sorrendben alakulhatott az első három hely sorsa?

7. A Brazíliában megrendezett 2014-es labdarúgó-világbajnokságon 32 csapat vett részt. A csapatokat 8 négyes csoportba sorsolták. Az azonos csoportba került csapatok körmérkőzést játszottak egymással. (A csoporton belül mindegyik csapat egy mérkőzést játszott az összes többi csapattal.) A csoportokból az első két helyezett csapat jutott tovább, a másik két csapat kiesett. A továbbjutó 16 csapat kieséses rendszerben játszott tovább. (A továbbjutó csapatokat párokba sorsolták, és az egy párba került két csapat játszott egymás ellen. A mérkőzések vesztesei kiestek, a győztesek továbbjutottak. Ezt egészen a végső győztes kiválasztásáig folytatták.)
a) Hány mérkőzést játszott az a csapat, amelyik nem jutott tovább a csoportjából?
b) Hány mérkőzést játszott a győztes Németország csapata?
c) Hány csapat játszott pontosan 5 mérkőzést?
(felvételi feladat 2015)

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Csoportmunka

A táblázat a Toldi második énekében található betűk darabszámát tartalmazza. (A kettős betűket külön számoltuk, azaz például a táblázatban az sz egy darab s-et és egy darab z-t jelent.) Összeszámoltuk a magánhangzók és a mássalhangzók számát, és beírtuk a táblázatba. A kérdések megválaszolásához használj zsebszámológépet, vagy a mobiltelefonod számológép funkcióját!

a	á	b	c	d	e	é
324	121	84	37	93	333	137
f	g	h	i	í	j	k
42	153	69	143	16	75	159
l	m	n	o	ó	ö	ő
200	142	257	139	29	66	28
p	q	r	s	t	u	ú
33	0	154	235	257	29	26
ü	ű	v	w	x	y	z
17	8	70	0	0	123	125

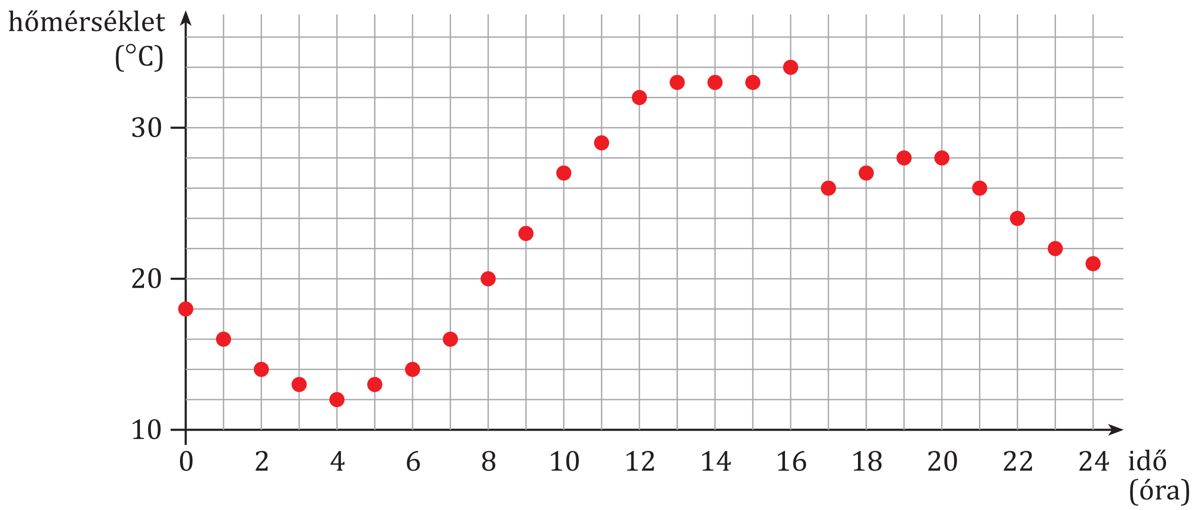
a) A betűk hányadrésze magán-, illetve mássalhangzó? Írd fel százalékos alakban is!
b) Ábrázold a magán- és mássalhangzók számát oszlopdiagramon és kördiagramon!
c) Hasonlítsd össze a kapott adatokat a harmadik lecke első példájában kapott eredménnyel!

	Magánhangzó	Mássalhangzó	Összesen
Darabszám	1416	2308	3724
Hányadrésze az összesnek			1
Százalékban			100%

d) Mit gondolsz, milyen százalékos értékeket kapnál a magánhangzók és mássalhangzók számára vonatkozóan a Toldi harmadik énekének adatai alapján?
e) Vajon ugyanilyen eloszlást kapnál-e, ha Quetzalcóatl (ejtsd: kezalkóatl), az azték mitológiában a tudás és a tanulás istene lenne a vizsgált szöveg főszereplője?

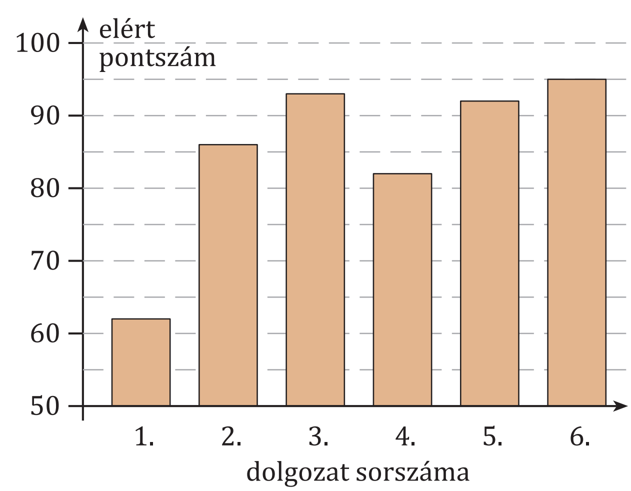
Feladatok

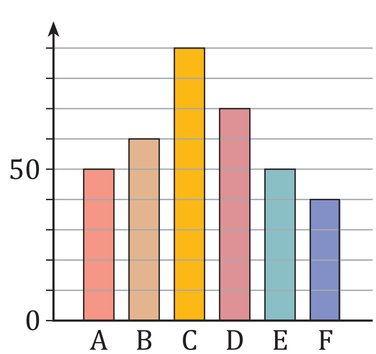
1. A grafikon a hőmérséklet változását mutatja egy nyári napon, óránként.
A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



a) Hány órakor volt a leghidegebb?
b) Mikor volt 27 °C a hőmérséklet?
c) A nap melyik órájában volt a legnagyobb hőmérséklet-változás? Mit gondolsz, mi okozhatta?
d) Reggel 6 óra és 10 óra között hány °C-kal emelkedett a hőmérséklet?

2. Panni hat dolgozatot írt matekból az év során. Minden dolgozat legfeljebb 100 pontos lehetett. A dolgozatok pontszámait a diagramon láthatod.
a) Hányadik dolgozata lett a legrosszabb?
b) A 85 pont feletti dolgozatokra kapott ötöst. Hányadik dolgozata lett ötös?
c) Hányadik dolgozat lett a legjobb?
d) Hány pont a dolgozatainak az átlaga?





3. Az oszlopdiagramról leolvasható betűkhöz tartozó értékeket írd be egy táblázatba, majd ábrázold ezeket kördiagramon!

4. Négy gyerek, Gerzson, Jerri, Panni és Lulu indult a versmondó versenyen.
a) Hányféle sorrendben végezhettek?
b) Hányféle sorrendben végezhettek, ha Lulu lett a negyedik és Gerzson a második?

5. Sorold fel az összes olyan háromjegyű természetes számot, amely számjegyeinek az összege

a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 25!

6. A víz árának összetevőit a táblázatban láthatod. Általában az elhasznált víz mennyiségét egy vízórával mérik és a csatornadíjat ugyanannyi köbméter után kell fizetni, mint az elhasznált víz mennyisége.

Ivóvíz		Csatorna	
Alapdíj, amit minden hónapban fizetni kell (Ft)	Az elfogyasztott víz ára (Ft/m^3)	Alapdíj, amit minden hónapban fizetni kell (Ft)	A csatornahálózatba engedett szennyezett víz költsége (Ft/m^3)
250	220	300	260

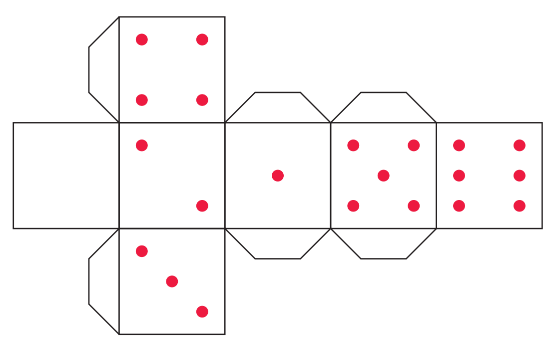
a) A Kis családban 6 m^3 vizet fogyasztanak havonta.
b) A Nagy családban 15 m^3 vizet fogyasztanak havonta.
Készíts oszlop- és kördiagramot a két család havi számlájának összetételéről!

7. Panni összegyűjtötte, hogy az osztálytársai milyen járművel érkeznek az iskolába.
A következő táblázatot kapta:

Gyalog	Biciklivel	Helyi járat (busz/villammos/metro…)	Távolsági járat busz/vonat	Autó
𝍸 ||||	||	𝍸 𝍸 |	||	𝍸 |||

Készíts az adatok alapján oszlop- és kördiagramot!
Készítsd el a diagramokat a saját osztályod adatai alapján is!

8. Rajzold le egy kartonpapírra az alábbi ábrát! Vágd ki, és ragassz belőle egy kockát! A pettyeket is másold át az ábra szerint! A kettes melletti üres lapot hajtsd belülre, és erre ragaszd a 6 pettyes lapot!



a) Mit gondolsz, ezt a kockát eldobva melyik lesz a leggyakrabban előforduló szám?
b) Dobjatok 20-at a most készített papírkockátokkal! Melyik szám lett a leggyakoribb?
c) Ábrázoljátok a saját adataitokat oszlopdiagramon!
d) Összesítsétek a dobások eredményeit! Készítsetek táblázatot az eredményekből! Melyik lett a leggyakoribb dobott szám?
e) Ábrázoljátok az összesített adatokat oszlopdiagramon!
f) Hogyan tudnátok olyan kockát készíteni, amelyen a 6 lényegesen többször jön ki, mint a többi szám?
g) Végezzétek el a kísérletet egy szabályos dobókockával is! Válaszoljátok meg a *b)*, *c)*, *d)*, *e)* kérdéseket ebben az esetben is!