

I. MATEMATIKAI LOGIKA

„Ohó álljunk csak meg. Ön azt mondja, a rögeszmém, hogy őrült vagyok. De hiszen tényleg az vagyok, az imént mondta. De hiszen akkor ez nem rögeszme, akkor az egy logikus gondolat. Tehát nincs rögeszmém. Tehát mégse vagyok őrült. Tehát csak rögeszme, hogy őrült vagyok, tehát rögeszmém van, tehát őrült vagyok, tehát igazam van, tehát nem vagyok őrült. Mégiscsak gyönyörű dolog a tudomány!”

(Karinthy Frigyes: Betegek és bolondok)

Az emberek gondolkodásmódjában, kommunikációs kultúrájában mindig is meghatározó elem volt a logika. A következtetési szabályok alkalmazásai éppúgy fellelhetők az ókori görög filozófusok írásaiban és a középkori teológiai hitvitákban, mint a későbbi korok tudományos munkáiban. A matematikai logika „karrierje” napjainkig tart; jelentős alkalmazási területei például a filozófia, a szimbolikus nyelvészet és az informatika.

1. VEGYES FELADATOK

A 10. osztályban megismerkedtünk néhány egyszerű logikai alkalmazással. Megvizsgáltuk a matematikai állítások tulajdonságait, az állítások megfordítását és tagadását, és elemeztük a szükséges és elégséges feltételek kapcsolatát. Idén elmélyítjük ismereteinket. A következő leckékben pontosan rögzítjük a matematikai logika objektumait, ezek tulajdonságait és a közöttük ható műveleteket, valamint formalizáljuk az eddigi tapasztalatainkat is. Ebben a leckében vegyes feladatokat válogattunk a tágabb értelemben vett logika témaköréből.

Nagy Károly német-római császár udvarában élt **Alcuin** (735–804), korának híres tudósa. Ő volt a császár környezetében élő ifjú nemesek nevelője, és a lovagi erények tanítása mellett a gondolkodás művelését is fontosnak tartotta. Egyszerű, józan ésszel megoldható problémákat tűzött ki, amelyek szerinte „élesítik az ifjak elméjét”. A feladatok közül jónéhány a mai napig friss maradt, s része lett a matematikai folklórnak; másokkal pedig a rejtvényirodalomban találkozhatunk, leginkább a találos kérdések műfajában.

1. példa

Alcuin egy közismert feladata a farkas, a kecske és a káposzta áthajózásáról szól.

Egy révésznek kis csónakján át kell szállítania a folyón egy farkast, egy kecskét és egy kosár káposztát. Sem a farkas és a kecske, sem a kecske és a káposzta nem maradhat együtt őrizetlenül. A csónakban pedig egyszerre csak egyikük – vagy a farkas, vagy a kecske, vagy csak a káposzta – fér el a révész mellett. Mit tegyen a révész?

Megoldás

Az egyszerű algoritmus első lépése adódik: először a kecskét kell átszállítani. (Egyébként a parton maradók valamelyike megenné a másikat.) Ezután viszont úgy tűnik, megakadtunk: akár a káposztát, akár a farkast viszi át a révész, a túlparton összeférhetetlenség alakul ki. A trükk az az észrevétel, hogy a révész visszafelé is szállíthat a csónakján.

A kecske átszállítása után két lehetősége van a révésznek.

I. Átviheti a farkast, visszahozza a kecskét, átviszi a káposztát, majd visszatér a kecskéért.

II. Vagy az előző eset „szimmetrikus párját” hajtja végre: átviszi a káposztát, visszahozza a kecskét, átviszi a farkast, majd visszatér a kecskéért.

Megjegyzés

Az algoritmust szimbólumokkal is leírhatjuk. Ha F , K , k jelöli rendre a farkast, a kecskét és a kosár káposztát, és a $\rightarrow$ és $\leftarrow$ nyilak a csónak két mozgásirányát, akkor a megoldások a következőképpen formalizálhatók:

I. $(K \rightarrow), (\leftarrow), (F \rightarrow), (K \leftarrow), (k \rightarrow), (\leftarrow), (K \rightarrow)$.

II. $(K \rightarrow), (\leftarrow), (k \rightarrow), (K \leftarrow), (F \rightarrow), (\leftarrow), (K \rightarrow)$.

(Itt természetesen $\leftarrow$ az üres járatot jelenti.)



Alcuin

Angol származású egyházi matematikus, korának kiemelkedő tudósa. 775 körül latin nyelven megírt könyvének a címe „Problémák az ifjú elméjének frissítésére”. A feladatok egy része keleti származású, már korábban ismert volt. A mű sokáig mintaként szolgált a későbbi tankönyvíróknak.

I. MATEMATIKAI LOGIKA

Egy kicsit nehezebb Alcuin következő feladata.

2. példa

Három féltékeny férj, mindegyik a feleségével, át akar kelni egy folyón, ahol az átkeléshez egyetlen kétszemélyes csónak áll rendelkezésükre. Hogyan keljenek át a túlsó partra, ha a férfiek ragaszkodnak ahhoz, hogy feleségük ne maradjon nélkülük férfi társaságában?

Megoldás

Jelölje A , B és C a férjeket, a , b , c a megfelelő feleségeket; valamint a csónak mozgásának két irányát a $\rightarrow$ és $\leftarrow$ nyilak. Néhány sikertelen próbálkozás után most is nyilvánvalóvá válik, hogy a feladat csak úgy oldható meg, ha a visszaúton alkalmanként két személyt utaztatunk a csónakkal.

Többféle megoldás van, egy lehetséges eljárás a következő: $(A, a \rightarrow)$, $(\leftarrow A)$, $(b, c \rightarrow)$, $(\leftarrow a)$, $(B, C \rightarrow)$, $(\leftarrow B, b)$, $(A, B \rightarrow)$, $(\leftarrow c)$, $(a, b \rightarrow)$, $(\leftarrow C)$, $(C, c \rightarrow)$. Érdekes az algoritmus lépéseit papíron, ceruzával végigkövetni, s ellenőrizni, hogy a két parton valóban teljesülnek a személyekre vonatkozó feltételek.



Két tipikus logikai feladat következik, egy ún. elemi összetartozásos probléma, valamint egy számítógépes játék elemzése.

3. példa

Egy Pécsről Budapestre tartó vonatfülkéjében négy lány ül: Anna, Bea, Cili és Dóri. A négy utas lakóhelye – valamilyen sorrendben – Pécs, Budapest, Mohács és Szekszárd.

Az alábbi (1)–(4) kijelentések alapján állapítsuk meg, hogy ki hol lakik!

(1) Dóri már többször járt látogatóban Pécssett.

(2) Bea idősebb a Pécssett lakó lánynál.

(3) Annát a végállomáson várja a barátja, aki betegség miatt maradt otthon közös lakásukban.

(4) Dóri a busójárásról jön haza.

Megoldás

Az egyszerű feladatra többféle megoldás adható. Ezek közös jellemzője, hogy a közölt információk segítségével folyamatosan szűkítjük a lehetőségeket. Az alábbiakban a jól használható táblázatos módszert alkalmazzuk.

Ennek az a lényege, hogy az adatokat és összefüggéseket egy 4×4 -es táblázatba foglaljuk úgy, hogy az összetartozó elempárokat valamilyen jellel, mondjuk egy 1-essel jelöljük. Például megtehetjük, hogy a táblázat soraiban a lányokat, az oszlopokban pedig a városokat soroljuk fel (kezdőbetűikkel); s a táblázat „A” sorába és „Bp” oszlopába írt 1-es jel azt jelenti, hogy az „A” lány a „Bp” városban lakik. Ekkor tehát a táblázatban összesen négy 1-es jel lesz: *minden sorban és minden oszlopban pontosan egy darab*. A maradék mezőket pedig kitölthetjük 0-val, ami arra utal, hogy a megfelelő személy és város között nincs kapcsolat.

Először megállapítjuk, hogy a vasútvonalon az állomások sorrendje Pécs, Szekszárd, Budapest; s erre a vonalra csatlakozik a mohácsi utas. Ezután az (1)–(4) információk segítségével folyamatosan növeljük a kizárások számát.

(1) miatt Dóri, (2) miatt Bea nem lakik Pécsen, (3) miatt Anna budapesti. Ezen információkat jelöljük az 1. táblázatban.

	P	Sz	Bp	M
A			1	
B	0			
C				
D	0			

1. táblázat

	P	Sz	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0		0	
C			0	
D	0		0	

2. táblázat

	P	Sz	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0		0	
C	1	0	0	0
D	0		0	

3. táblázat

Mivel Anna budapesti, az „A” sor és „Bp” oszlop további celláit 0-akkal tölthetjük ki. Így kapjuk a 2. táblázatot. (Anna már nem lakhat máshol, és más nem lakhat Budapesten. Általában is igaz, hogy ha valamelyik sorban vagy oszlopban szerepel 1-es, akkor a további sor- és oszlopmezők nullákkal tölthetők ki.)

Most észrevehetjük, hogy Cili Pécsen lakik, mert a „P” oszlopban kell lennie 1-esnek, és eddig három 0 szerepel. Ebben az esetben az elemi kizárások tehát eldöntő információvá álltak össze. A 3. táblázatban jelöltük az eldöntő információ miatti kizárásokat.

Végül (4) miatt Dóri nem mohácsi, így a befejezés egyértelmű: Dóri szekszárdi, Bea mohácsi (4. táblázat).

Az összetartozó lány-város értékpárok tehát (A, Bp), (B, M), (C, P) és (D, Sz).

	P	Sz	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	1	0	0

4. táblázat

Megjegyzés

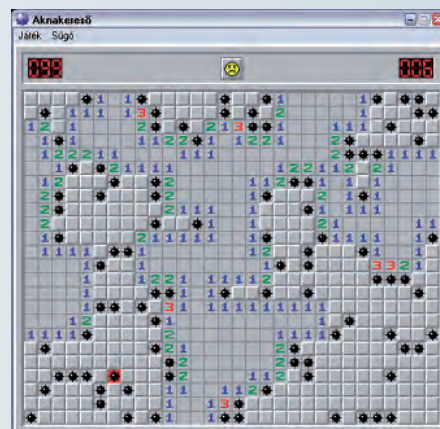
Ennek a régi 8. osztályos felvételi feladatnak csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a szövegösszefüggés alapján feltételezzük, hogy Anna is pesti lakos, csakúgy, mint a barátja. Szigorúan véve a (3) állításból ez nem következik. (Hasonló feladatokkal gyakran találkozhatunk.)

4. példa

Az ismert számítógépes játék, az *Aknakereső* egyik részálása a következő:

		1	
		1	
		2	
		1	
1	1	1	

Itt az 1 és 2 számok azt mutatják, hogy az adott mezőnek hány olyan szomszédja van, amely aknát (bombát) tartalmaz. (A csúcsbeli szomszédság is számít, tehát a tábla közepén egy mezőnek nyolc szomszédja van.) A szürke szín pedig már a biztonságos mezőket jelzi, azaz azt, hogy ezeken nincsen akna. A feladat annak meghatározása, hogy a maradék nyolc mezők melyike tartalmazhat még bombát.



Megoldás

Matematikai szempontból például a következőképpen formalizálhatjuk a feladatot.

Bevezetjük az ábra szerinti a, b, c, d, e, f, g, h változókat; ezek értéke 1, ha a mezőjükön akna található, egyébként 0.

Az alulról első sorban, az első 1-es miatt felírhatjuk, hogy $(1) a + b = 1$. Az egyenlet jelentése: mivel az első 1-es mező pontosan egy bombával szomszédos, ezért a vagy b közül pontosan az egyiken van bomba; így összegük pontosan 1.

g	h	1	
e	f	1	
c	d	2	
a	b	1	
1	1	1	

Ugyanezt az egyenletet kapjuk a sorban második 1-es miatt is, de a harmadik 1-es új információt ad: $(2) b = 1$. (Hiszen ez a mező 1 aknás cellával szomszédos, és csak a b jöhet szóba.)

A harmadik oszlopban, lentől fölfelé haladva további négy összefüggés írható fel, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

- (1) $a + b = 1$,
- (2) $b = 1$,
- (3) $b + d = 1$,
- (4) $b + d + f = 2$,
- (5) $d + f + h = 1$,
- (6) $f + h = 1$.

Az egyenletrendszer megoldása a $\{0, 1\}$ halmazon egészen könnyű. (2)-t felhasználva (1)-ből és (3)-ból $a = d = 0$, (4) és (5) különbségéből $h = 0$, végül (6)-ból $f = 1$ adódik. Első közelítésben bombák tehát a és f mezőkön vannak, az a, d és h mezőkön pedig nincsenek.

g		1	
e	B	1	
c		2	
	B	1	
1	1	1	

Ha további információnk nincs, akkor a c, e és g mezők mindegyike két-két állapotú lehet (vagy tartalmaznak aknát, vagy nem), így a bombák elhelyezésére a kezdőállásban összesen $2^3 = 8$ -féle lehetőség van.

Persze a kezdőállásban lehetnek segítő információk. Ha például a játék végén tartunk, akkor tudjuk, összesen hány aknát kell még megtalálnunk. Ha ez a szám 2 vagy 5, akkor készen vagyunk: a további c, e, g mezők állapota egyértelműen ismert.

A **játék folytatása** során a jobb egérgombbal elhelyeztük a b és f helyre az aknát (bombát: B), valamint a bal egérgombbal rákattintottunk az a, d és h mezőkre. Ekkor a gép kiírta, a játékszabálynak megfelelően, hogy a kérdezett mezőkkel hány bomba szomszédos, és a következő ábrát kaptuk:

g	2	1	
e	B	1	
c	2	2	
1	B	1	
1	1	1	

Innen a játék könnyen befejezhető. A két bomba közötti mező – ezt korábban d -vel jelöltük – 2-es jelzésű, tehát két bombával szomszédos. Ezeket a bombákat már meg is találtuk, a mező alatt és fölött, ezért $(7) c + e = 0$, azaz $c = e = 0$. A másik észrevétel, hogy a korábban h -val jelölt mező is két aknával szomszédos, s ezekből csak egy ismert, az alatta levő. Így $(8) e + g = 1$.

A két egyenletről $c = e = 0$, $g = 1$ adódik, készen vagyunk.

B	2	1	
2	B	1	
2	2	2	
1	B	1	
1	1	1	

5. példa

András, Béla és Csaba játék közben betört egy ablakot. Keresték a tettest, és ezért mindegyiküket megkérdezték, hogy kinek a lelkén szárad az ablak betörése. A következő (1)–(3) válaszokat kapták:

- (1) András: Béla volt.
- (2) Béla: Csaba törte be az ablakot.
- (3) Csaba: Nem én törtem be az ablakot.

Ki volt a tettes, ha tudjuk, hogy az ártatlanok igazat mondanak? (A bűnös igazat is mondhat, de hazudhat is.)

Megoldások

Ebben az egyszerű példában áttekintjük azokat a megoldási módszereket, amelyeket a hasonló feladatokban alkalmazhatunk. A megoldások leírása előtt talán érdemes bevezetni a következő, az állításokat egyszerűbben rögzítő formulákat:

- (1) $A: B = b$;
- (2) $B: C = b$;
- (3) $C: C \neq b$.

Ezek jelentése szemléletes. Például (1) „fordítása”: „András azt mondja, hogy Béla bűnös.”

Hasonló rövidítéseket alkalmazhatunk az állítások tartalmára vonatkozóan. Például (1) $= i$ vagy (2) $= h$ jelentése: az (1) állítás igaz, a (2) pedig hamis.

S végül a személyek állításának valódiságát is jelölhetjük ugyanígy (feltéve, hogy nem okoz félreértést): Például $A = i$ vagy $B = h$ jelentése: András igazat mondott, Béla hazudott.

Első megoldás (hipotézis felállítása, esetszétválasztás)

Ebben a „frontális” megoldásban két esetet különböztetünk meg például A állításától függően.

1. eset: Tegyük fel, hogy A igazat mond, azaz szerinte B a bűnös. Ekkor a (2) állítással B hazudik (ez nem mond ellent a feltevésünknek), és a (3) állítás is (C ártatlansága) megerősíti a feltevést. Tehát egy lehetséges megoldás, hogy B törte be az ablakot.



A tömörebb jelöléssel például a következőt írhatjuk:

Ha $A = i \Rightarrow (1) = i \Rightarrow B = b \Rightarrow C \neq b \Rightarrow C = i \Rightarrow (3) = i$.

2. eset: Meg kell még vizsgálni azt a lehetőséget, ha A hazudik, azaz ő a bűnös. Ekkor állítása szerint B ártatlan (ez igaz állítás), ezért (2) igaz. Itt ellentmondást kaptunk: B szerint C a bűnös, de két bűnös nem lehet.

Vagyis ez az eset nem lehetséges.

Második megoldás (logikai kapcsolatok elemzése)

Bonyolultabb feladatokat érdemes azzal kezdeni, hogy az állítások között logikai összefüggéseket keresünk. Ezek megtalálása leszűkíti a lehetőségek számát. Kereshetünk ellentmondó vagy egymást kizáró állításokat, továbbá következmény- vagy ekvivalens állításokat.

Néhány kiindulási lehetőség, ahonnan a megoldás már könnyen befejezhető:

- (1) és (2) ellentmondó állítások, nem teljesülhetnek egyszerre. Legalább egyikük hamis – ezért (3) biztosan igaz. (Tehát rögtön adódik, hogy C ártatlan.)
- (2) és (3) egymást kizáró állítások, pontosan egyikük igaz. Ebből ismét az következik, hogy a harmadik állítás, (1), csak igaz lehet. (Tehát B a bűnös.)
- (1)-nek (3) következménye: ha (1) igaz, akkor (3) is. (Sőt azt is megjegyezhetjük, hogy ha (3) nem igaz, akkor (1) sem igaz.)

Itt tulajdonképpen három megoldási lehetőséget mutattunk, ezek igazi haszna (az esetszűkítés) a nehezebb feladatoknál mutatkozik meg.

Harmadik megoldás (összes eset megvizsgálása az igazmondók „eloszlása” alapján)

Négy lehetőség adódik az igazmondók számára: vagy valamelyik fiú hazudik (3 eset), vagy mindegyik igazat mond. Ezeket az eseteket rendszeresen végigpróbálva kapjuk az egyetlen megoldást. (Persze a próbálkozások száma jelentősen csökkenthető, ha figyelembe vesszük például a második megoldás megszorításait.)

Negyedik megoldás (összes eset vizsgálata a bűnös személye alapján)

Három eset lehet, attól függően, hogy ki a bűnös. Ezeket rendszeresen megvizsgálva kapjuk a megoldást.

Megjegyzés

Ne becsljük le az összes eset végigpróbálásán alapuló utolsó két módszert. Egyrészt ez az eljárás *mindig alkalmazható*; másrészt a bonyolultabb feladatokat gyakran csak így lehet befejezni; harmadrészt pedig ez a megoldási módszer könnyen algoritmizálható és számítógépre vihető.

Ötödik megoldás (speciális módszerek)

Néha a feladat sajátosságai alapján is szűkítő észrevételeket tehetünk. Ebben a feladatban ilyen például az (1) $A: B = b$ állítás. Mivel csak egy bűnös van (a feladat specialitása), így ez vagy B , akire az állítás vonatkozik; vagy A , aki az állítást teszi. Mindkét esetben kiderül C ártatlansága.

Vagy ilyen állítás lehetne például $C: A \neq b$. Az állítás nem lehet hamis (A és C is bűnös lenne), tehát az állítás igaz: A ártatlan, így igazat mond stb.

Rejtvény

Egy ismert magyar szépirodalmi műből való az alábbi részlet. Melyikből?

[...] A második kérője Rózsikának egy nagyvállalkozó volt Brünnből, aki mint üzletember, azt a mellékjogot se tagadta, hogy a Rózsika hozományával egész Közép-Európára kiterjeszti a vállalatát.

Az öregúrnak tetszett a nyílt beszéd, és azt mondta szokott mókázó modorával:

– Igen helyes, nagyon helyes, és szívesen adom a leányomat vállalkozónak, mert magam is az voltam. Hanem talán hallotta is ön, hogy én bizonyos fokig bolond ember vagyok. Sohase tessék ellenkezni. Tudom, hogy mondták önnek, és igazuk volt. Én csakugyan bolond vagyok. De ez nem veszedelmes örökség, ne féljen tőlem. Ez csak egy rögeszme. Én ugyanis egy kérdést szoktam föltenni ahhoz, aki a lányomat ajánlatával megtiszteli. És ettől függ aztán a további. Tudom, hogy ez bolondság, eszeveszettség, de nem tehetek róla.

– Igen, hallottam már ilyesmit.

– Nos, hát mondja meg nekem, hogy ha Pozsonyból Brassóba mindennap két postakocsi közlekednék, Brassóból Pozsonyba pedig ugyanannyi, ha mármost fölteszük, hogy az út tíz napig tart, mennyi kocsival találkozik ön útközben, míg Pozsonyból egy postakocsin ülve Brassóba ér?

A rejtvény megoldása a fejezet végén, a 34. oldalon található.



Nevek
Alcuin;
Fibonacci.

FELADATOK**1. K2**

Egy napon két vándor közösen nekilátott a falatozásnak, egyiküknek 2, a másiknak 3 cipője volt. Arra jött egy harmadik utazó is, így hármasban fogyasztották el a cipőket. Amikor végeztek, a harmadik utazó fizetségül otthagytott 5 krajcárt. Hogyan tud a két vándor igazságosan megosztani a pénzen, ha mindenki ugyanannyit evett a cipőkből?

(Ezt a szép feladatot már a középkori matematikus, Leonardo Pisano (1175?–1250) (ismertebb nevén Fibonacci) is kitűzte. Idén még fogunk találkozni a nevével.)

2. K2

Seholsincs szigeten egy szobában összegyűlt 11 lakos. (Ezen a szigeten mindenki vagy igazmondó, vagy hazudós, tehát mindig vagy igazat mond, vagy hazudik.) A lakókat egyesével megkérdezték, hány igazmondó van közöttük. A következő válaszokat adták:

a) 5, 3, 9, 4, 3, 6, 5, 3, 2, 5, 7;

b) 1, 5, 8, 3, 7, 4, 1, 0, 6 (most ketten nem válaszoltak).

Hány igazmondó lehet a szobában? (A lakók ismerik egymást.)

3. K2

Egy osztályban a matematikát, kémiát, fizikát, biológiát, magyart és németet Kovács, Novák és Varró tanár urak tanítják.

a) Mindegyik tanár pontosan két tantárgyat tanít.

b) A kémiatanár ugyanabban a házban lakik, mint a matematikatanár.

c) Kovács tanár úr a legfiatalabb.

d) A matematikatanár és Varró tanár úr gyakran biliárdoznak.

e) A fizikatanár idősebb a biológiatanárnál, de fiatalabb Novák tanár úrnál.

f) A legidősebb távolabb lakik az iskolától, mint két kollégája.

Melyik tanár melyik tantárgyakat tanítja?

4.

Az $[3000; 9000[$ intervallumban hány olyan egész szám van, amelyik

K1 a) osztható 3-mal és 5-tel;

K2 b) osztható 3-mal vagy 5-tel;

E1 c) 3 és 5 közül pontosan az egyik számmal osztható;

E1 d) 3 és 5 közül legfeljebb az egyik számmal osztható;

E1 e) ha osztható 3-mal, akkor osztható 5-tel is?

5. K2

Egy téglatest élei 1-nél nagyobb egész számok, térfogata $V = 72$ egység. Anna megmondja Bélának a felszín számjegyeinek összegét, de Béla nem tudja megmondani, mekkorák az élek. Ezután Anna azt is elárulja, hogy a legrövidebb él függőleges helyzetű.

Vajon mi most már meg tudjuk mondani, hogy mekkorák a test élei?

A következő feladat is – csakúgy, mint az első – kultúrtörténeti érdekességű.

6. E1

(Arany Dániel verseny, 1964)

Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:

a) Vannak Beatles-frizurás huligánok.

b) Minden huligánnak nyegle a modora.

Döntsük el és indokoljuk meg, hogy következnek-e ebből az alábbiak:

c) Van olyan nyegle modorú huligán, akinek Beatles-frizurája van.

d) Minden nyegle modorú huligánnak Beatles-frizurája van.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1–24.

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 23–27, 36–39, 45–46, 48–49.

2–3. ÁLLÍTÁSOK. LOGIKAI MŰVELETEK

A hétköznapi életben sokféle összefüggésben használjuk a logika szót.

Elvárjuk másoktól, hogy bizonyos helyzetekben logikusan cselekedjenek.

Szeretnénk a rendelkezésünkre álló információk ismeretében a számunkra fontos kérdésekben logikusan dönteni.

Mások kiszámíthatatlan cselekedeteiben megpróbálunk valamilyen rendszert, vagy logikát felfedezni.

Bizonyos okfejtésekről úgy gondoljuk, hogy azok teljesen logikusnak tűnnek, mégis hamis következtetésre vezetnek, és így tovább.

Mi most megpróbálunk egy kis rendet rakni ezekben a kérdésekben.

Először is nézzük meg, mit gondoltak erről a több ezer éves tudományról az emberiség nagy gondolkodói.

Old Shatterhand logikai levezetése

– Azt még megértem, hogy a szeme jobb, mint az enyém, hiszen fiatalabb – mondta Sam Hawkins. – De hogy tudta kitalálni, mit csináltak ezek az indiánok?

– Logikai levezetés útján – feleltem mosolyogva.

– Hát az micsoda?

– Megmagyarázom egy példával. Hawk annyit tesz, mint sólyom. A sólyom mezei egereket eszik. Hawkins – sólyomfajta. Tehát Sam Hawkins mezei egereket eszik.

(Karl May: Winnetou)



A **logika alapjait Arisztotelész** (Kr. e. 384–322) fektette le munkáiban. Ő a mai értelemben vett logikát analitikának nevezi, vagyis a tudományos gondolkodás módszertani eszközének, illetve előfeltételének tekinti azt.

Az arisztotelészi hagyomány szerint a logikát a helyes gondolkodás formáit, műveleteit és alapelveit kutató és meghatározó tudománynak tekinthetjük.

William Ockham (1285–1348) ferences rendi szerzetes és filozófus híres „borotvájával” levágja a logika tudományáról a fölösleges szórszálhasogatás gyakorlatát. Szerinte a létezőkről szóló magyarázatok közül a legkézenfekvőbbet, a legkevesebb bizonyításra szoruló elméleti föltevést (hipotézist) tartalmazót kell elfogadni, az okok számát fölöslegesen nem kell gyarapítani. Ha egy adott jelenségre két magyarázat is adott, az egyszerűbbet, a kevesebb okot tartalmazó értelmezést kell elfogadni. Ockham józan és reális, a tapasztalathoz kötődő filozófiájával kezdődik a logika tudományának ártértelezése: arra való a logika, hogy a valóság egyszerű és áttekinthető megismerésében biztos eszközként (lásd Arisztotelészt) szolgálja a megismerésre törekvő értelmet. Ez a szemlélet már átmenetet jelent az újkori gondolkodás felé, amikor a logika visszanyeri a megismerés megalapozásában betöltött vitathatatlan szerepét, amit Arisztotelész számtalan félreértelmezése óta mintha elfelejtettek volna.



Arisztotelész

Descartes (1596–1650) néhány egyszerű és világos, a józan ész (azaz hétköznapi gondolkodás) számára fölfogható alapelve próbálta visszavezetni a filozófálás logikáját.

Értekezésében ezeket az alapelveket a következőképp fogalmazta meg:

- minden előítéletet kerülve csak azt kell igaznak elismerni, ami tisztán és világosan felfogható,
- a problémákat részekre kell bontani, amennyire csak lehetséges,
- a legegyszerűbb tárgytól fokozatosan kell a bonyolultabb felé haladni,
- a rendszer teljességét felsorolással kell biztosítani.

Íme, a Descartes-nál egyszerűnek és egyértelműnek tűnő út ahhoz, hogy eljuthassunk az evidenciákhoz, vagyis a világos, tiszta és határozott ismeretekhez. E módszer hatástörténete fölmérhetetlen, még a 20. századi logikai analízis (analitikus filozófia) képviselőinél is föllelhető.

Leibniz (1646–1716) arra gondolt, hogy létre lehet hozni egy abszolút pontos jelentésű fogalmakból álló tudományos nyelvet, melyet aztán a matematikai szabályokhoz hasonló, rögzített logikai szabályok szerint használhatnánk az igazságok megfogalmazásában. Joggal tekintik tehát Leibniz-t a matematikai logika megálmodójának. A legegyszerűbb általános fogalmak lehetnének azok a nyelvi atomok, amelyeknek logikai szabályok szerinti összekeveréséből nyernénk a tudományos (matematikai természetű) alapigazságokat.

Mindezekből világosan kitűnik, hogy az újkor nagy gondolkodói a logikát minden egyéb szellemi tevékenység alapjának és előfeltételének tekintették, a matematikához hasonló, de annál általánosabb, egyetemesebb tudománynak.

Descartes és Leibniz ugyanakkor zseniális matematikusok is voltak, így munkásságukban töretlenül egybeolvadt a matematikai és a logikai gondolkodás mint logikus gondolkodás.

Nietzsche (1844–1900) szerint a gondolkodás eredendően alogikus, tehát nem más logika szerint működik, hanem logikán innen, az ösztönökből meríti indítékait. Ám kritikusabb pillanataiban az emberi szellem mégis bizonyosságot keres, és leghamarabb a logikában, illetve annak adott szellemi területre való alkalmazásában véli meglegelni e bizonyosságot.

Elmondhatjuk, hogy a 21. században minden komolyabb szakterület nélkülözhetetlen eszköze a logika, és bár egyetlen logikatudomány van, többféle logikai alrendszer (irányzat, elmélet) létezik.



Gottfried Wilhelm Leibniz

A logika a helyes következtetések matematikai alapjait fogalmazza meg.

A logika segítségével a már ismert állításokból újabb összetett állításokat fogalmazhatunk meg, és azok igazságtartamát is megvizsgálhatjuk.

ÁLLÍTÁSOK, KIJELENTÉSEK

Nagyon fontos, hogy a logika állításokkal foglalkozik ugyan, de nem vizsgálja azok igazságtartalmát. A konkrét állítások igazságtartalmát az adott szakterületen jártas embereknek kell eldöntenie. Ez a jellemzője teszi lehetővé, hogy a logikát a megismerés egyik legfontosabb eszközének tekintsük.

Tehát számunkra csak az fontos, hogy egy állítás vagy igaz, vagy hamis.

Az állításokat kijelentéseknek, régebbi nevükön ítéleteknek is nevezzük.

Definíció

Állítás: Olyan kijelentés, amelyről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz, vagy hamis.

Tehát egy állítás vagy igaz, vagy hamis. Harmadik lehetőség nincs. Az állításokat az ábécé nagybetűivel jelöljük.

1. példa

Igazak vagy hamisak az alábbi állítások?

$A = \{a \text{ 16 négyzetszám}\}$, $B = \{a \text{ háromszög belső szögeinek összege } 180^\circ\}$, $C = \{\text{minden szám négyzete pozitív}\}$, $D = \{a \text{ Föld a Nap körül ellipszispályán kering}\}$, $E = \{\text{tegnap Szegeden esett az eső}\}$, $F = \{a \text{ 12.a-ban 12 szemüveges diák van}\}$, $G = \{\text{van olyan fa, amely több mint 500 m magasra megnő}\}$, $H = \{\text{ma szép idő volt}\}$.

Megoldás

Egy matematikai állítás igazságtartalmát az abszolút értékhez hasonlóan jelöljük. Tehát $|A| = i$ azt jelenti, hogy az A állítás igaz. Ugyanígy a B és a D állítás is igaz. A C viszont hamis, hiszen nem minden szám négyzete pozitív, van egy kivétel, a nulla. Ezt így jelöljük: $|C| = h$. A G állítás is hamis, tehát $|G| = h$. Az E és F állítások igazságtartalma az adott szituációban egyértelműen eldönthető.

A H nem tekinthető a logika szempontjából állításnak, mert szubjektív vélemény, hogy kinek mi a szép idő.

Minden állításnak megfogalmazhatjuk a tagadását, vagy ahogyan gyakran mondjuk, az ellentettjét.

Definíció

Egy állítás tagadásán (negációján, ellentettjén, angolul „NOT”) azt az állítást értjük, ami igaz, ha az eredeti állítás hamis és hamis, ha az eredeti állítás igaz. Jele: $\neg A$.

A logikában a tagadást egyváltozós műveletnek tekintjük, aminek igazságtartalma csak az eredeti állítás igazságtartalmától függ. Mindezt egyszerűen kifejezhetjük egy táblázattal, ami minden esetet tartalmaz.

A	$\neg A$
i	h
h	i

2. példa

Fogalmazzuk meg az 1. példa állításainak tagadásait!

Megoldás

$\neg A = \{a \text{ 16 nem négyzetszám}\}$, $\neg B = \{a \text{ háromszög belső szögeinek összege nem } 180^\circ\}$,
 $\neg D = \{a \text{ Föld a Nap körül nem ellipszispályán kering}\}$, $\neg E = \{\text{tegnap Szegeden nem esett az eső}\}$,
 $\neg F = \{a \text{ 12.a-ban nem 12 szemüveges diák van}\}$.

A C és G állítás tagadása nem olyan egyszerűen történik, mint a többi példánkban, ahol egy megfelelően elhelyezett 'nem' szócska elegendő.

Ha egy állításban egy halmaz minden eleméről állítunk valamit, akkor ahhoz, hogy az hamis legyen, elegendő találni a halmaznak egyetlen elemét, amire az állítás nem igaz.

$\neg C = \{\text{van olyan szám, aminek a négyzete nem pozitív}\}$.

Máskor egy állítás azt mondja, hogy egy halmazban találunk legalább egy elemet, amire igaz az állításunk. Ennek a tagadása azt mondja ki, hogy az állítás a halmaz minden elemére hamis.

$\neg G = \{\text{minden fára igaz az, hogy nem nő 500 m-nél magasabbra; másként mondva nincs olyan fa, amelyik több mint 500 m magasra megnő}\}$.

Az A állítás **ellentettjének ellentettje** maga az eredeti állítás: $\neg(\neg A) = A$.
 Állításunkat legegyszerűbben az előbbi táblázat segítségével indokolhatjuk.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
i	h	i
h	i	h

Fogalmak, nevek
 Arisztotelész;
 Ockham;
 Descartes;
 Leibniz;
 Nietzsche;
 állítás, kijelentés;
 tagadás;
 ellentett (állításé).

FELADATOK

1. K1

Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását! Melyik igaz, melyik hamis az állítások közül?

- $A = \{\text{Három egymást követő egész szám összege mindig osztható hárommal.}\}$
- $B = \{\text{Minden magyar állampolgár beszél magyarul.}\}$
- $C = \{\text{Van olyan egész szám, aminek a számjegyeit összeadva a szám négyzetgyökét kapjuk.}\}$
- $D = \{\text{A háromszög súlypontja mindig a háromszög belsejében van.}\}$
- $E = \{\text{Minden ember szereti a mézet.}\}$
- $F = \{\text{Van olyan ember, akinek minden állítása igaz.}\}$
- $G = \{\text{Van olyan ember, aki soha nem téved.}\}$
- $H = \{\text{Van olyan szerelem, ami el nem múlik.}\}$
- $I = \{\text{Minden évben legalább egyszer elmegyünk nyaralni.}\}$
- $J = \{\text{Minden héten van olyan nap, amikor tornázom és úszom is.}\}$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1, 19, 20.

4–5. KÉTVÁLTOZÓS LOGIKAI MŰVELETEK I.



Az előző órán már megismerkedtünk egy fontos logikai művelettel, a negációval, ami az eredeti állítás logikai értékét az ellenkezőjére változtatta. A gondolkodás szempontjából nagyon fontos két állítás összekapcsolása. Így egy új összetett állítás jön létre. Természetesen nem mindegy, hogy milyen logikai művelettel kapcsoljuk össze a két állítást. A hétköznapi beszédben is sokat használjuk az *és*, *vagy*, *sem-sem*, *akkor és csak akkor* kifejezéseket. Most megismerkedünk ezek pontos matematikai definíciójával.

Például:

1. „Hoztam a boltból tejet **és** kenyeret.” Mikor füllentettem?
2. „Hozok a boltból vajat **vagy** margarint.”
Mikor mondhatják nekem, hogy nem mondtam igazat?

Az egyik leggyakrabban használt logikai művelet az **és**. Ha két állítást és kötőszóval kapcsolunk össze, akkor az így kapott összetett állítás akkor lesz igaz, ha mindkét állítás igaz.

Nézzünk néhány egyszerű példát!

1. $A = \{\text{Ez a négyszög téglalap és rombusz is egyben.}\}$
2. $B = \{\text{Esik az eső és süt a nap.}\}$
3. $C = \{\text{Ez a szám osztható 2-vel és hárommal.}\}$
4. $D = \{\text{A 64 négyzetszám és köbszám is.}\}$
5. $E = \{\text{Tévét nézek és teát iszogatok.}\}$

Elemezzük az A állítás szerkezetét! Legyen $P = \{\text{Ez a négyszög téglalap.}\}$, $Q = \{\text{Ez a négyszög rombusz.}\}$.

Ez után $A = P$ **és** Q . Hasonlóan megkereshetjük a többi esetben is az összetett állításunkban szereplő egyszerű állításokat.

Az előbbi összetett állításokat csak akkor tekintjük igaznak, ha mindkét benne szereplő állítás igaz. Nagyon lényeges, hogy ha csak az egyik állítás igaz, akkor az összetett állítás mindenképpen hamis. Ha mindkét állítás hamis, akkor is hamis lesz az összetett állítás.

Definíció

A **logikai és** (konjunkció, angolul „AND”) olyan kétváltozós logikai művelet, ami csak akkor igaz, ha a benne szereplő mindkét állítás igaz. Jelölése: $A \wedge B$.

(Ha két kijelentést az és logikai művelettel kapcsolunk össze, akkor az így kapott összetett állítás csak akkor igaz, ha mindkét állítás igaz. Ezt fejezi ki a táblázat.)

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A kétváltozós műveleteket is egyszerűen tudjuk definiálni táblázat segítségével. A táblázatban feltüntetjük a két változó igazságértékének összes lehetséges variációját, és megadjuk minden esetben, hogy mi lesz az összetett állítás logikai értéke. Mivel mindkét állítás lehet igaz vagy hamis, ezért $2 \cdot 2 = 4$ eset lehetséges.

Másodikként tekintsük a **vagy** kötőszót. Itt már kicsit bonyolultabb a kép. A magyar nyelv legalább háromféle értelemben használja a vagy kötőszót.

1. „A következő tenisztornán Federer **vagy** Nadal fog indulni.” Itt nyilván megengedő értelemben használjuk a vagy kötőszót, hiszen lehet, hogy mindketten elindulnak.

2. „A tenisztornát Federer, **vagy** Nadal nyeri.” Itt nyilván kizáró értelemben használjuk a vagy kötőszót, mert mindketten nem nyerhetnek, de lehet, hogy egy harmadik játékos nyer.

3. „Tudjuk, hogy a döntőbe Föderer és Nadal jutott, tehát a tornát Federer, **vagy** Nadal nyeri.” Itt kiegészítő értelemben használjuk a vagyot. Egyikük biztosan nyer.

A logikában megállapodás, hogy ha egyszerűen a vagy kötőszót használjuk, azt mindig megengedő értelemben tesszük.

1. $A = \{\text{Ez a szám négyzetszám vagy köbszám.}\}$

2. $B = \{\text{Ma reggelire pirítóst eszem, vagy tejet iszom.}\}$

3. $C = \{\text{Eszter vagy utazik, vagy alszik.}\}$

Észrevehetjük, hogy ezekben az összetett állításokban két állítást kapcsoltunk össze a vagy kötőszó segítségével. Ezeket az összetett állításokat akkor tekintjük igaznak, ha legalább az egyik állítás igaz.

Úgy is mondhatjuk, hogy ezek az állítások akkor hamisak, ha mindkét állítás hamis.

Itt a vagy szót megengedő értelemben használjuk. Ez azt jelenti, hogy az összetett állítást akkor is igaznak tekintjük, ha mindkét állítás igaz.

1. Például legyen az első állításban a szám az 1-es, vagyis $A' = \{\text{Az 1 négyzetszám vagy köbszám.}\}$

Mindkét egyszerű állítás igaz, tehát az összetett állítást is igaznak tekintjük.

2. A B állítást is igaznak tekintjük, ha reggel pirítós evés közben tejet iszogattam.

3. A C is igaz, ha Eszter vonatozás közben szunyókál.

Definíció

A **logikai vagy** (diszjunkció, angolul „OR”) olyan kétváltozós logikai művelet, ami akkor hamis, ha a benne szereplő mindkét állítás hamis. Jele: $A \vee B$.

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A leggyakrabban az eddig megismert három logikai műveletet használjuk.

A tanulmányaink során végeztünk műveleteket számokkal, vektorokkal, halmazokkal, most pedig a műveleteket a logika keretein belül a kijelentésekkel végezzük.

A **műveleteknek** néhány alapvető **tulajdonságát** itt is megvizsgálhatjuk.

I. Kommutativitás (felcserélhetőség)

$$A \wedge B = B \wedge A,$$

$$A \vee B = B \vee A.$$

Indoklás: Ha a táblázatainkban az „ A ” és „ B ” oszlopát felcseréljük, a harmadik oszlop értékei nem változnak.

II. Asszociativitás (csoportosíthatóság)

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Indoklás: Az első esetben mindkét oldalon csak akkor lesz igaz az összetett állítás, ha mindhárom állítás igaz. A második esetben pedig csak akkor lesz hamis mindkét állítás, ha a benne szereplő mindhárom állítás hamis.

I. MATEMATIKAI LOGIKA

Táblázat segítségével is ellenőrizhetjük állításainkat.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h	i	i	i	i
i	h	i	h	h	h	h	i	i	i	i
i	h	h	h	h	h	h	i	i	h	i
h	i	i	h	h	i	h	i	i	i	i
h	i	h	h	h	h	h	i	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h	h	i	i	i
h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h

Logikai műveleteket tulajdonképpen eddig is alkalmaztunk, például amikor megoldottuk a következő típusú feladatot:

1. példa

Keressük meg az összes olyan x valós számot, amelyre $(x - 2)(3 - 2x) = 0$!

Megoldás

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Legyen $A = \{x - 2 = 0\}$, $B = \{3 - 2x = 0\}$. A logika nyelvén fogalmazva a feladat megoldása $A \vee B$. Tehát $x = 2 \vee x = 1,5$.

Egészen más a helyzet, ha az $(x - 2)^2 + (3 - 2x)^2 = 0$ egyenlettel van dolgunk.

Ennek a megoldása az előző jelöléseket használva $A \wedge B$. Hiszen két négyzetszám összege csak úgy lehet nulla, ha mindkét szám nulla.

Tehát $x = 2 \wedge x = 1,5$, ami egyszerre nem teljesülhet, vagyis a feladatnak nincs megoldása.

Ahhoz, hogy a feladatot megoldjuk, ismernünk kellett a matematikai alapokat és helyesen kellett használni a logikai műveleteket. Hasonló példákat hozhatunk a tudomány más területeiről is.

Az eddig megismert három művelet kapcsolatát jól mutatja a következő néhány példa.

2. példa

$A = \{\text{Anna szereti a fagyit és a csokit.}\}$

Az alábbi állítások közül melyik lesz az A állítás tagadása?

$B = \{\text{Anna nem szereti sem a csokit, sem a fagyit.}\}$,

$C = \{\text{Nem igaz az, hogy Anna szereti a csokit és a fagyit.}\}$,

$D = \{\text{Anna vagy a csokit, vagy a fagyit nem szereti.}\}$.

