Előszó

E feladatgyűjtemény a gimnáziumok és a szakközépiskolák tanterveinek matematika tananyagához illeszkedik. Néhány fejezetben olyan feladatok találhatók, amelyek túlmutatnak a tananyagon. A különböző tantervekhez kapcsolódó feladatokhoz nem tettünk jelzést, így természetes, hogy a más-más tantervek alapján tanulók – felkészültségüktől függetlenül – sem tudhatnak minden feladatot megoldani. Javasoljuk ezért, hogy a diákok – önálló, otthoni munkájukhoz, a feladatok kiválasztásához – kérjenek tanácsot tanáraiktól. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a csillaggal megjelölt feladatok nem azért „nehezebbek”, mert a több órában matematikát tanulók számára ajánlottak, hanem azért, mert a megoldásuk különleges ötlet felhasználását, illetve az ismert összefüggések észrevételét igénylik.

A feladatgyűjtemény végén, az „Útmutatások és eredmények” című részben a tanulók vagy segítséget kapnak a megoldáshoz, vagy pedig – az eredmények megkeresésével – ellenőrizhetik munkájukat. Nem minden feladat megoldásához adtunk útmutatást vagy eredményt; amikor például a segítséggel már magát a megoldást is közöltük volna.

Ezek után összefoglaljuk azokat a legfontosabb jelöléseket, amelyek az utóbbi években a középiskolai matematikaoktatásban – elsősorban az újabb tankönyvek hatására – elterjedtek. Elöljáróban is hangsúlyozzuk, hogy nem helyes merev, egyedül alkalmazható jelölések rögzítése. A matematikai szakirodalom jelölései soha nem voltak egységesek, különösen nem azok az alkalmazásokban előforduló jelölések. Bizonyos célokra az egyik jelölés, másokra pedig egy másik jelölés lehet egyszerűbb, alkalmasabb, a lényeget jobban megmutató. Érdemes megismerni többféle, a gyakorlaban előforduló jelölést akkor is, ha a matematikaórán esetleg csak egyfajtát használunk.

A feladatgyűjteményben előforduló jelölések közül a szokásosakat, azokat, amelyeket hosszú idő óta változatlanul használnak a középiskolai matematikában, nem soroljuk fel. Így zömmel a halmazok jelöléseivel foglalkozunk. Megemlítünk még néhány, a matematikai logikában használt jelölést. Ahol többféle jelölés is elfogadott, használatos, ott ezeket feltüntetjük akkor is, ha a feladatgyűjteményben ezek közül csak az egyik szerepel.

A jelölések és azok magyarázata

$x \in A$: az x eleme az A halmaznak;
$A \cup B$: az A és B halmaz egyesítése (uniója);
$A \cap B$: az A és B halmaz közös része (metszete);
$A \setminus B$ vagy $A - B$: az A és B halmaz különbsége;
$A \subset B$ vagy $A \subseteq B$: az A halmaz a B halmaz részhalmaza;
$\emptyset$: üres halmaz;
$|A|$: az A véges halmaz elemeinek száma (végtelen A halmaz esetén a halmaz számossága);
N: a természetes (nemnegatív egész) számok halmaza;
Z: az egész számok halmaza;
Q: a racionális számok halmaza;
I: az irracionális számok halmaza
R: a valós számok halmaza;
C: a komplex számok halmaza;
[a; b]: az $a \leqq x \leqq b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az a; b zárt intervallum);
]a; b[vagy (a; b): az $a < x < b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az a; b nyílt intervallumon).

Számhalmazok jelölésekor gyakran használjuk például a következőt:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$ jelöli azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyek kielégítik a $\mid$ után álló feltételt, példánkban ez egyenlő a]2; 3[intervallummal.

Függvényeket általában a következőképpen jelölünk:

Legyenek A és B adott számhalmazok, ekkor például

$f\colon A \to B,\ x \mapsto 2x$, vagy

$f\colon A \to B,\ f(x) = 2x$ jelöl egy A-n értelmezett, B-beli értékeket felvevő függvényt.

Ha $A = B = \mathbf{R}$, akkor $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ típusú függvényről is beszélünk, ekkor nem mindig írjuk ki külön az értelmezési tartományt és a képhalmazt. Ha $A \subset \mathbf{R}$ és $B \subset \mathbf{R}$, akkor célszerű alkalmazni azt az egyszerűsítést, hogy egy képlettel definiált függvény esetében – amennyiben A azonos azoknak a valós számoknak a halmazával, amelyre a képletnek értelme van – külön nem írjuk ki az értelmezési tartományt. Például $f\colon f(x) = \sqrt{x-1}$ jelöli azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $[1; +\infty[$, egy képhalmaza $\mathbf{R}$.

A jól ismert függvények jelölésére önállóan használhatjuk a sin, cos, tg, ctg, $\log_a$ jelöléseket, de ugyanilyen értelemben az $\exp_a$ jelölést is az $x \mapsto a^x$ függvényre, de használatos a rövidebb a^x jelölés is, ha a szövegösszefüggésből világos, hogy függvényről van szó.

A matematikai logika jelöléseiből a következőket használjuk:

$A, B, C, \ldots$: állítások (kijelentések); a gyakorlatban az állításokat sokszor azok logikai értékével szoktuk azonosítani.

$\neg A$ vagy $\overline{A}$: A negációja;

$A \wedge B$: A, B konjunkciója;

$A \vee B$: A, B diszjunkciója;

$A \to B$: A implikáció B;

$A \leftrightarrow B$: A ekvivalencia B;

$\exists$: egzisztenciális kvantor („van olyan”);

$\forall$: univerzális kvantor („minden”).

I. HALMAZOK TULAJDONSÁGAI ÉS A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy-egy halmazt?

1. {osztályunk tanulói};
2. {egy tetszőleges osztály tanulói};
3. {osztályunk fiútanulói};
4. {osztályunk magas tanulói};
5. {Magyarország városai ma};
6. {Arany János versei};
7. {a természetes számok};
8. {a természetes számok halmaza};
9. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet};
10. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet valós gyökei};
11. {egy egyenlet gyökei};
12. {az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
13. {az $x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
14. {az elsőfokú egyenletek, osztályunk tanulói};
15. {egy adott egyenlet, melynek 2 az egyik gyöke};
16. {egy olyan egyenlet, melynek egy valós gyöke van};
17. {tetszőleges három egész szám};
18. {a prímszámok};
19. {a legnagyobb prímszám};
20. {néhány prímszám}.

2. Soroljunk fel a következő halmazok elemei közül legalább kettőt:

1. {a 0,5-nél kisebb egész számok};
2. {Petőfi versei};

3. {az 50-nél nagyobb prímszámok};
4. {a prímszámokból álló halmazok};
5. {az $x^2 - 4x = 0$ egyenlet valós gyökei};
6. {az olyan elsőfokú egyenletek, melyeknek a gyöke 100};
7. {1986 prímosztói};
8. {192 és 729 közös osztói};
9. {a szabályos testek};
10. {2^{40} értékének különböző számjegyei}.

3. Soroljuk fel a következő halmazok elemeit:
1. {a 100-nál kisebb négyzetszámok};
2. {a 10-nél kisebb négyzetszámok száma};
3. $\left\{\text{az } \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökei}\right\}$;
4. $\left\{\text{az } \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökeinek száma}\right\}$;
5. {az $x^2 - 2x \leqq 0$ egyenlőtlenség egész gyökei};
6. {az $x^2 + 4x < 0$ egyenlőtlenség egész gyökeinek száma};
7. {a háromjegyű páros számok száma};
8. {az olyan kétjegyű számok, melyek számjegyeinek összege 9};
9. {az olyan háromjegyű számok száma, melyek számjegyeinek összege 9};
10. {729 pozitív osztói}.

4. Válasszuk ki a következő halmazok közül az egyenlőket:
1. {a legkisebb prímszám};
2. {egy prímszám pozitív osztóinak száma};
3. {az $x^3 - 2x^2 = 0$ egyenlet valós gyökei};
4. {az $x^3 - 2x^2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a száma};
5. {a (0; 2) számpár};
6. {a −1 és 3 közé eső páros számok};
7. {a $10^{10} + 1$ szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege};
8. {az $x^{100} = 1$ egyenlet valós gyökei};
9. {az $x = 0$ és $y = 2$ egyenletű egyenesek metszéspontjának koordinátái};
10. {$(-1)^n$ különböző értékei, ahol n tetszőleges pozitív egész szám}.

5. Vizsgáljuk meg, hogy a következő állítások közül melyek igazak:

1. $2 \in \{\text{a prímszámok}\}$.
2. A négyzet eleme a trapézok halmazának.
3. 2^{40}, $2^{40} - 1$ és $2^{40} + 1$ eleme az összetett számok halmazának.
4. Ha $a \in A$ és $b \in B$, akkor $(a \in b) \in B$, ahol A a prímszámok halmaza, B az összetett számok halmaza.
5. $A \in A$.
6. $A \in \{A\}$.
7. Az $x^n - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei elemei a pozitív egész számok halmazának, tetszőleges n egész szám esetén.
8. $1,\dot{9} \in \{\text{a 2-hatványok}\}$.
9. Ha $a \in A$ és $A \in B$, akkor $a \in B$.
10. $A = B$ esetén $A \in \{B\}$.

6. Jelölje $\mathbf{N}$, P, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ rendre a természetes számok, a prímszámok, az egész számok, a racionális számok, az irracionális számok, a valós számok halmazát. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz:

1. Ha $a \in \mathbf{N}$ és $b \in \mathbf{N}$, akkor $(a + b) \in \mathbf{N}$.
2. Ha $a \in P$ és $b \in P$, akkor $(a + b) \in P$.
3. Ha $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Z}$, akkor $ab \in \mathbf{Z}$.
4. Ha $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Q}$, akkor $ab \in \mathbf{Z}$.
5. Van olyan a és b szám, hogy $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Q}$ esetén $ab \in \mathbf{Z}$.
6. Ha $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{I}$, akkor $(a - b) \in \mathbf{I}$.
7. Ha $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{R}$, akkor $ab \in \mathbf{I}$.
8. Van olyan a és b, hogy $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{I}$ esetén $ab \in \mathbf{N}$.
9. $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{R}$, ha $a \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{R}$.
10. $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Q}$ esetén $\dfrac{a^2}{1 + b^2} \in \mathbf{Q}$.

7. Legyen $a \in X$ és $b \in X$. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben igazak a következő állítások:

1. $(a + b) \in X$. 2. $(a - b) \in X$. 3. $ab \in X$.

4. $\dfrac{a}{b} \in X$, ha $b \neq 0$, ahol X helyébe rendre az előző feladatban sze-

replő **N**, P, **Z**, **Q**, **I**, **R** halmazokat helyettesítjük és a, illetve b az X halmaz tetszőleges eleme lehet.

8. Jelölje az A halmaz elemeinek számát $|A|$. Határozzuk meg $|A|$ értékét a következő esetekben:
1. $A = \{$a 20-nál kisebb prímszámok$\}$;
2. $A = \{$36 pozitív osztói$\}$;
3. $A = \{$a 100-nál kisebb négyzetszámok$\}$;
4. $A = \{$az $x^2 < 100x$ egyenlőtlenség egész gyökei$\}$;
5. $A = \{$az $x^2 + x + 2 = 0$ egyenlet valós gyökei$\}$;
6. $A = \{\emptyset, 2\}$;
7. $A = \{$a legkisebb egész szám$\}$;
8. $A = \{$a legkisebb természetes szám$\}$;
9. $A = \{11^4$ különböző számjegyei$\}$;
10. $A = \{$a $10^2 < x^3 < 10^4$ egyenlőtlenségrendszer egész gyökei$\}$.

9. Az a és b egymástól különböző egész szám, eleme az A halmaznak. Tudjuk, hogy A-nak eleme bármely két különböző elemének összege is. Határozzuk meg $|A|$ értékét, ha az A halmaz véges és minden eleme egész szám.

10. Soroljuk fel a következő halmazok közül azokat, amelyeknek végtelen sok elemük van:
$A = \{$a prímszámok$\}$; $B = \{$egy sík félsíkjai$\}$;
$C = \{$egy sokszög csúcsai$\}$; $D = \{$a páros prímszámok$\}$;
$E = \left\{\text{az } \dfrac{x^2-1}{x+1} = x - 1 \text{ egyenlet valós gyökei}\right\}$;
$F = \left\{\text{azok az } x \text{ egész számok, amelyekre } \dfrac{x+100}{x} \text{ is egész szám}\right\}$;
$G = \{$csak az 1 számjegyet tartalmazó számok$\}$;
$H = \{$azok a számok, amelyek számjegyeinek összege 2$\}$;
$I = \{$a természetes számok számjegyei$\}$;
$J = \{$a valós számok halmaza$\}$.

11. Az A halmaznak eleme az 1 és -1. A halmaz bármely két elemének számtani közepe is eleme a halmaznak. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaznak végtelen sok eleme van.

12. Egy véges számhalmaz bármely elemének a reciproka is eleme a halmaznak, az adott elem -1-szeresével együtt Igazoljuk, hogy a halmaz elemszáma páros.

13. Az A számhalmaz elemeinek száma 2. A halmaz bármely két elemének szorzata is az A halmaz eleme. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz elemei között szerepel a 0, vagy az 1.

14. Tekintsük alaphalmaznak a valós számok halmazát (**R**). Határozzuk meg a következő halmazok komplementerét:
1. **Q** = {a racionális számok};
2. **I** = {az irracionális számok};
3. {a pozitív valós számok};
4. **R**;
5. $\emptyset$.

15. Mivel egyezik meg egy adott halmaz komplementerének komplementere, illetve a kapott halmaz komplementere?

***16.** Lehet-e egy véges halmaz komplementere is véges halmaz?

17. Adjuk meg az {1; 2; 3; 4; 5} halmaz kételemű részhalmazait.

18. *a)* Hány háromelemű részhalmaza van egy hat elemet tartalmazó halmaznak?

b) Hány valódi részhalmaza van egy egyelemű halmaznak?

19. Bizonyítsuk be, hogy az $A = \{1; 3; 5; 7\}$ halmaznak összesen 2^4 számú részhalmaza van. Írjuk fel külön-külön a 0; 1; 2; 3; 4 elemű részhalmazokat.

20. Legyen T a téglalapok, R a rombuszok, N a négyzetek, P a paralelogrammák halmaza. Melyik halmaz melyiknek részhalmaza T, R, N, P közül?

***21.** A **6.** feladat jelöléseit használva döntsük el, hogy melyik igaz a következő állítások közül:
1. $P \subset \mathbf{Q}$.
2. $\mathbf{Z} \subset \mathbf{I}$.
3. $P \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.
4. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
5. $\mathbf{N} \subset \mathbf{I}$.
6. $\mathbf{N} \subset P \subset \mathbf{R}$.
7. $P \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
8. $\overline{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Q}$, ahol **R** az alaphalmaz.
9. $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{R}$, ahol **R** az alaphalmaz.
10. $\overline{\mathbf{R}} \subset \overline{\mathbf{Q}} \subset \overline{\mathbf{Z}}$, ha az alaphalmaz **R**.

22. Igaz-e, hogy $a \in A$ esetén $\{a\} \subseteq A$?

23. Bizonyítsuk be, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ esetén $A = B$.

***24**. Határozzuk meg az A halmazt, ha $A \subset \bar{A}$.

25. Bizonyítsuk be, hogy a részhalmazképzés tranzitív művelet, azaz $A \subset B$ és $B \subset C$ esetén $A \subset C$.

26. Milyen feltétel mellett igaz, hogy $A \subset B$ esetén $|A| < |B|$?

27. Bizonyítsuk be, hogy n elemű halmaz összes részhalmazának száma 2^n.

***28.** Igazoljuk, hogy $A \subset B$ esetén $\overline{B} \subset \overline{A}$.

2. Műveletek halmazokkal

29. Legyenek az A halmaz elemei 16 pozitív osztói, a B halmaz elemei 24 pozitív osztói, a C halmaz elemei 12 pozitív osztói. Határozzuk meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ halmazokat. Lesz-e a kapott halmazok között két egyenlő halmaz?

30. Írjunk fel olyan negyedfokú egyenletet, melynek gyökei az A és B halmaz uniójának elemei, ahol $A = \{$az $x^3 = x$ egyenlet valós gyökei$\}$, B pedig az $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza.

31. Az A halmaz legyen a (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) koordinátapárokkal adott négyszöglap pontjainak halmaza; a B ponthalmaz legyen a (0; 0), (1; 1), (0; 2) koordinátájú csúcsok által meghatározott háromszöglap pontjainak halmaza; a C halmaz pedig legyen a (0; −1), (1; 0), (0; 1) csúcspontokkal adott háromszöglap pontjainak halmaza. Milyen alakzatokat határoznak meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ és $(A \cup B) \cup C$ halmazok?

32. Jelölje A és B az S sík két különböző félsíkját. Milyen esetben lehet $A \cup B = S$?

***33.** Jelölje A és B az S sík három páronként különböző félsíkját. Adjunk példát olyan esetre, amikor $A \cup B \cup C \neq S$.
Lehet-e az $\overline{A \cup B \cup C}$ halmaz az S sík korlátos tartománya?

34. Bizonyítsuk be, hogy $A \subset B$ esetén $A \cup B = B$.

35. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B véges halmaz, akkor

$$|A| + |B| \geqq |A \cup B|.$$

36. Ha A és B véges halmaz, akkor $|A|+|B|=|A \cup B|$ esetén hány közös eleme van az A és B halmaznak?

***37**. Legyen A és B az S sík két olyan korlátos tartományának pontjaiból álló nem üres halmaz, melyekre $A \cup B = B$. Igazak-e a következő állítások:
1. $A \cup \overline{B} = S$. 2. $A \cup \overline{A} = S$. 3. $B \cup \overline{A} = S$. 4. $\overline{A} \cup \overline{B} = S$.
5. $\overline{A \cup B} \cup A = S$. 6. $\overline{A \cup B} \cup A = S$,
ahol az S sík pontjainak halmaza az alaphalmaz.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B halmaz véges halmaz, akkor $|A \cup B| = |A|$ esetén $A \supseteq B$.

39. Mondjunk példát olyan A és B halmazra, hogy $|A \cup B| = |A|$ esetén ne teljesüljön az $A \supseteq B$ összefüggés.

40. Legyen A a 2-vel osztható kétjegyű számok halmaza, B a 3-mal osztható 100-nál kisebb pozitív számok halmaza, C pedig a 30-cal osztható egész számok halmaza. Határozzuk meg az A és B, B és C, C és A halmaz közös részét.

41. Adjunk példát olyan A, B és C halmazra, hogy teljesüljenek a következő feltételek: $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A| = |B| = |C| = 2$ és $A \neq B$, valamint $B \neq C$.

42. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B = B$ esetén $B \subseteq A$.

43. Jelöljük $(x;\, y)$-nal a koordinátasík tetszőleges pontjának koordinátáit. Legyen A, B és C rendre az olyan $(x;\, y)$ koordinátákkal rendelkező pontok halmaza, melyekre $|x+y| \leqq 1$, $|x-y| \leqq 1$, illetve $|y| \leqq \frac{1}{2}$. A sík milyen tartományait határozzák meg az $A \cap B$ és $(A \cap B) \cap C$ halmazok?

44. Legyen $D = \left\{(x;\, y) \in S \,|\, x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R} \text{ és } |x| \leqq \frac{1}{2}\right\}$. A **43.** feladat feltételeit használva határozzuk meg az $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ halmazt. (S a sík pontjainak halmaza.)

45. Bizonyítsuk be, hogy $A \cup B = A \cap B$ esetén $A = B$.

46. Igazoljuk, hogy ha A és B véges halmazok, akkor $|A \cap B| \leqq \dfrac{|A|+|B|}{2}$.

47. Legyen A és B a sík két tetszőleges téglalaptartománya pontjainak halmaza. Legfeljebb hány részre osztja a síkot az A és B „halmaz”?

48. Tekintsük a koordinátasík tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapokat. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n téglalap, ha $n = 1, 2, 3, 4$?

49. Az előző feladat $n = 3$ esetében határozzuk meg az $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ halmazokat, ahol A, B, C olyan téglalaptartományok pontjaiból álló halmazok, melyek a síkot a lehető legtöbb részre bontják.

***50**. Bizonyítsuk be, hogy n olyan téglalap, melynek megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, a síkot legfeljebb $2n^2 - 2n + 2$ tartományra osztja.

51. Tekintsünk két olyan körlapot, melyek a síkot négy részre osztják. A két körlap pontjaiból álló halmaz legyen az A és B halmaz. Bizonyítsuk be, hogy a négy tartomány pontjai a következő ponthalmazok: $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

***52**. Adjunk meg négy olyan A, B, C, D ponthalmazt a síkon, hogy az egyes halmazok határvonala zárt görbe legyen és a halmazok a síkot 16 részre osszák úgy, hogy a 16 tartomány mindegyike $X \cap Y \cap Z \cap V$ alakban legyen felírható, ahol X, Y, Z és V rendre A vagy $\overline{A}$, B vagy $\overline{B}$, C vagy $\overline{C}$, D vagy $\overline{D}$ halmazzal egyenlő. (Az ilyen típusú diagramokat nevezik Venn-diagramoknak.)

***53**. Legyen a természetes számok halmaza (**N**) az alaphalmaz és legyen A, B, illetve C a 2-vel, 3-mal, illetve 6-tal osztható számok halmaza. Adjuk meg az A, B, C halmazok által meghatározott atomokat, ha atomnak nevezzük az olyan $X \cap Y \cap Z$ alakban felírható halmazokat, ahol X, Y és Z helyébe rendre A vagy $\overline{A}$, B vagy $\overline{B}$, C vagy $\overline{C}$ kerülhet és egyik halmaz sem üres.

54. Két különböző sugarú koncentrikus körlap pontjainak halmazát jelöljük A-val, illetve B-vel. Határozzuk meg az $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat, ha az A halmaz „sugara” a nagyobb.

55. Jelöljük rendre A-, B-, C-, D-, E-vel a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 6-tal osztható pozitív egész számok halmazát. Határozzuk meg a következő halmazokat:

1. $A \setminus B$; 2. $B \setminus A$; 3. $A \setminus C$; 4. $C \setminus A$; 5. $(C \setminus A) \setminus B$; 6. $D \setminus C$; 7. $D \setminus A$; 8. $(D \setminus C) \setminus B$; 9. $(E \setminus D) \setminus A$; 10. $(E \setminus D) \setminus (C \setminus B)$.

56. Legyen az S koordinátasík pontjaiból álló halmaz az alaphalmaz. Jelölje A, B és C rendre a (0; 0), (1; 0), (0; 1) középpontú egységnyi sugarú zárt körlapok pontjainak halmazát. Szemléltessük a következő halmazokat:
1. $\overline{A}\setminus B$; 2. $\overline{A}\setminus\overline{C}$; 3. $(B\cap C)\setminus A$;
4. $(A\setminus C)\setminus B$; 5. $A\setminus(C\setminus B)$; 6. $\overline{A}\setminus\overline{B}$;
7. $(\overline{A}\setminus\overline{B})\cup(\overline{B}\setminus\overline{C})\cup(\overline{C}\setminus\overline{A})$; 8. $(A\setminus\overline{B})\cup(B\setminus\overline{C})\cup(C\setminus\overline{A})$.

57. Bizonyítsuk be, hogy ha $A\setminus B=\emptyset$, akkor $A\subseteq B$.

58. Milyen feltétel teljesülése esetén lesz az A, B és C halmazra igaz, hogy $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=\emptyset$?

59. Legyen $A=B=\{0;1;2\}$. Határozzuk meg az $A\times B$ halmazt.

60. Hány elemből áll az $(A\times A)\times A$ halmaz, ha $A=\{0;1;2;3\}$?

61. Legyen $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|\leqq 1\}$, $B=\{y\in\mathbf{R}\,|\,|y|\leqq 1\}$. Milyen ponthalmazt határoznak meg azon $(x; y)$ koordinátapárok, amelyek elemei az $A\times B$ halmaznak?

62. Hány közös eleme van az $A\times B$ és $B\times A$ halmaznak, ha $A=\{0;1;2;3\}$, $B=\{0;1;2;4\}$?

63. Határozzuk meg az $(A\times B)\cap(B\times A)$ és $(A\times B)\setminus(B\times A)$ halmazt, ha $A=B$.

64. Bizonyítsuk be, hogy $A\times B=B\times A$ esetén $A=B$.

65. Igazoljuk, hogy $\emptyset\subset A\subset B$ esetén $A\times B\subset B\times B$.

66. Legyen $A=\{1;2;3\}$, $B=\{2;3;4\}$. Határozzuk meg a különböző halmazok elemszámát:
1. $(A\setminus B)\times(B\setminus A)$; 2. $(A\cup B)\times(A\cap B)$;
3. $(A\setminus B)\times(A\cap B)$; 4. $(B\setminus A)\times(B\cup A)$.

***67**. A és B olyan halmazok, melyekre teljesül, hogy $|A\times B|=100$. Határozzuk meg $|A\cup B|$ és $|A\cap B|$ minimumát, illetve maximumát.

***68**. Legyen $A\subset\mathbf{N}$, $B\subset\mathbf{N}$, ahol $\mathbf{N}$ a természetes számok halmazát jelöli. Ha az x és y számokra teljesül, hogy $y^2-x^2=80$, akkor $x\in A$ és $y\in B$. Határozzuk meg az A és B halmazt, ha az összetartozó értékpárokra $x<y$ teljesül.

69. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy
$A\cup B=\{1;2;3;4;5;6\}$, $A\setminus B=\{2;4;6\}$, $A\cap B=\{1;3\}$.
Határozzuk meg az A és B halmazt.

70. Bizonyítsuk be, hogy az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazok ismeretében egyértelműen meghatározható az A és B halmaz.

71. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $A\setminus B=\{4; 6; 8\}$, $B\setminus C=\{2; 5; 9; 10\}$, $C\setminus A=\{3; 7; 11\}$, $A\cap B\cap C=\{1\}$,

$$A\cup B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\},$$
$$C\cup A=\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11\}.$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat, ha $|C|=5$.

72. Adjunk meg három olyan kételemű halmazt, melyeknek páronként vett metszete nem üres halmaz, de mindhárom halmaznak nincs közös eleme.

73. Adjunk meg öt olyan halmazt, amelyekre teljesül, hogy bármely négy halmaz metszete nem üres halmaz, de az öt halmaznak nincs közös eleme.

74. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor $(A\cup B)\setminus(A\setminus B)=B$.

75. Az A, B, C ponthalmazok az S síkot nyolc tartományra bontják szét. Írjuk fel a nyolc tartományt az unióképzés és különbségképzés segítségével.

76. Írjunk fel hat olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek van közös eleme, de semelyik háromnak nincs.

***77**. Bizonyítsuk be, hogy A, B, C tetszőleges halmazok esetén az

$$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})=$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A).$$

78. Legyen $f(x)=x(x-1)(x+2)$ és $g(x)=x(x+1)(x+2)$, ahol $x\in\mathbf{R}$.

a) Írjuk fel $f(x)$ és $g(x)$ zérushelyeinek halmazát.

b) Határozzuk meg az $x\mapsto f(x)g(x)$, illetve $x\mapsto\dfrac{f(x)}{g(x)}$ függvény zérushelyeinek halmazát.

c) Lássuk be, hogy $f(x)$ és $g(x)$ zérushelyei halmazának uniója az $f(x)g(x)$ függvény zérushelyeinek halmaza, illetve azt, hogy az első két halmaz különbsége az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ függvény zérushelyeinek halmaza.

Jelöljük az $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvények zérushelyeinek halmazát F-fel, illetve G-vel. Bizonyítsuk be, hogy igazak a következő állítások:

d) Az $f(x)g(x)$ függvény zérushelyeinek halmaza az $F \cup G$ halmaz.

e) Az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ zérushelyeinek halmaza az $F \setminus G$ halmaz.

f) Az $f^2(x) + g^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza az $F \cap G$ halmaz.

g) Az $f(x) \pm g(x) = 0$ egyenlet gyökei halmazának részhalmaza az $F \cap G$ halmaz, ha az alaphalmaz mindegyik esetben a valós számok halmaza.

79. Az *a*, *b*, *c* polinomfüggvények zérushelyeinek halmaza legyen rendre az $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{0; 2; 4\}$ halmaz. Határozzuk meg a következő egyenletek gyökeinek halmazát:

a) $a(x)b(x)c(x) = 0$; *b)* $\dfrac{a(x)b(x)}{c(x)} = 0$;

c) $\dfrac{a(x)}{b(x)c(x)} = 0$; *d)* $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0$.

Az *f*, *g*, *h* polinomfüggvények valós zérushelyeinek halmazát rendre *F*-, *G*-, *H*-val jelöljük. Adjuk meg a következő egyenletek valós gyökeinek halmazát:

e) $f(x)g(x)h(x) = 0$; *f)* $\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0$;

g) $\dfrac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0$; *h)* $f^2(x) + g^2(x) + h^2(x) = 0$.

80. Legyen az $a(x) = 0$ és $b(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza *A* és *B*. Igaz-e, hogy az $a(x)b(x) = 0$, illetve $\dfrac{a(x)}{b(x)} = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $A \cup B$, illetve $A \setminus B$?

***81**. Az $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ egyenletek valós gyökeinek halmazát rendre *A*, *B*, *C*-vel jelöljük. Mondjunk példát olyan $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ egyenletekre, amelyek valós gyökeire teljesül, hogy az $a(x)b(x)c(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza nem egyezik meg az $A \cup B \cup C$ halmazzal. Igaz-e, hogy az $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza $A \cap B \cap C$?

***82**. Bizonyítsuk be, hogy az $a(x) = 0$ és $b(x) = 0$ egyenletből képzett $a(x)b(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza lehet az üres halmaz is, függetlenül attól, hogy hány gyöke van az eredeti egyenleteknek.

83. *a)* Tekintsük az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1}$ függvényt ($x \neq 1$) és az $x \mapsto \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvényt ($x \neq 0$ és $x \neq -2$). Határozzuk meg az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvény értelmezési tartományát úgy, hogy az a lehető legbővebb halmaz legyen.

b) Legyen az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya az A, illetve B halmaz. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto f(x)g(x)$ függvény értelmezési tartománya az $A \cap B$ halmaz.

84. Tekintsük a lehető legbővebb halmazon értelmezett $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvényeket, ahol $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$, illetve $g(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

a) Határozzuk meg az $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmezési tartományát.

b) Adjuk meg az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmazát.

c) Mi lesz az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmaza?

d) Az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya legyen az A, illetve B halmaz. Legyen továbbá az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletek valós gyökeinek halmaza F, illetve G. Mutassuk meg, hogy az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $(A \cap G) \cup (B \cap F)$.

85. Tekintsük a számegyenes következő zárt intervallumaiból álló ponthalmazokat: $I_1 = [0;2]$, $I_2 = [1;3]$, $I_3 = [2;4]$, $I_4 = [0;3]$. Határozzuk meg az $I_1 \cap I_2 \cap I_3$, $I_1 \cap I_2 \cap I_4$, $I_1 \cap I_3 \cap I_4$, $I_2 \cap I_3 \cap I_4$ halmazokat.

86. Mi a **85.** feladatban szereplő négy halmaz közös része, illetve uniója?

87. Határozzuk meg az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ intervallumsorozat egy közös pontját.

88. Bizonyítsuk be, hogy a $\left[0; \frac{1}{n}\right] = I_n$ intervallumsorozat tagjainak egy közös pontja van.