# I. Exponenciális és logaritmusfüggvények, egyenletek

## 1. Exponenciális függvény

**1.** *Egy gyógyszergyárban egyfajta baktériummal kísérleteznek. A baktérium másodpercenként osztódik kétfelé, így szaporodik. A fiolában bizonyos mennyiségű (egységnyi) baktérium van.*

*a) Mennyi baktérium lesz* 1*;* 2*;* 3*;* 4*;* 5 *stb. másodperc múlva?*

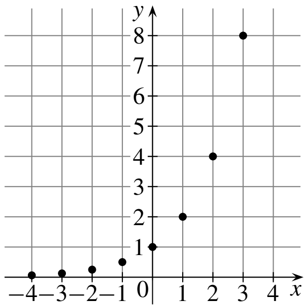
*b) Mennyi baktérium volt a vizsgálat megkezdése előtt* 1*;* 2*;* 3*;* 4*;* 5 *stb. másodperccel?*

| | |
|---|---|
| A vizsgálat megkezdésekor | A vizsgálat megkezdése előtt |
| a 0-dik másodpercben 1, | a (−1)-edik másodpercben $2^{-1} = \frac{1}{2}$, |
| 1 s eltelte után 2, | a (−2)-edik másodpercben $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, |
| 2 s eltelte után $2 \cdot 2 = 4$, | a (−3)-adik másodpercben $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, |
| 3 s múlva $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, | a (−4)-edik másodpercben $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$, |
| 4 s múlva $2^4 = 16$, | a (−5)-ödik másodpercben $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, |
| 5 s múlva $2^5 = 32$ stb. | a (−6)-odik másodpercben $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ |
| egységnyi lesz a baktériumok mennyisége. | egységnyi baktérium volt a fiolában. |

Az ilyenfajta változás gyakori a természetben: sejtek osztódása, sugárzó anyagok bomlása (feleződése) mind hasonló változások. Ezek az ún. exponenciális változások. Jellemző rájuk, hogy a változás egyre „gyorsabb” (vagy egyre „lassúbb”) az idő függvényében. Gondoljunk csak arra, hogy milyen rohamosan nő az osztódó baktériumok mennyisége.

A változást olyan függvénnyel lehet megadni, amely:

*Minden szóba jöhető $x$ számhoz hozzárendeli a $2^x$ értékét, vagyis $x \mapsto 2^x$. Ezt a függvényt 2 alapú exponenciális függvénynek nevezzük, amely jelen esetben az egész számokra van értelmezve.*



Készítsünk értéktáblázatot, és ábrázoljuk a függvény értékpárjait!

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

Láthatjuk, hogy a függvény csak pozitív értéket vesz fel.

**2.** *Nézzük meg, hogyan csökken az egységnyi tömegű sugárzó anyag, ha évente feleződik (*1 *év alatt lesz feleakkora, mint volt)! A megfigyelés kezdetekor* 1 *egységnyi a tömege.*

1 év múlva $\frac{1}{2}$,

2 év múlva $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

3 év múlva $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

4 év múlva $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ stb.

egységnyi lesz.

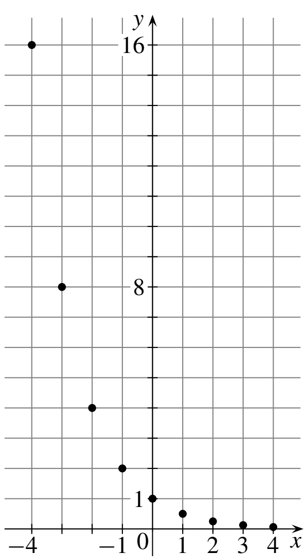
Ugyanígy a vizsgálat megkezdése előtt 1 évvel:

a $(-1)$-edik évben $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 2$,

a $(-2)$-edik évben $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 4$,

a $(-3)$-adik évben $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 8$ stb.

egységnyi volt.



A függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ez is exponenciális függvény: $\frac{1}{2}$ *alapú exponenciális függvény,* amely jelen esetben az egész számok körére van értelmezve. Készítsünk ismét értéktáblázatot, és ábrázoljuk a függvény összetartozó értékpárjait!

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

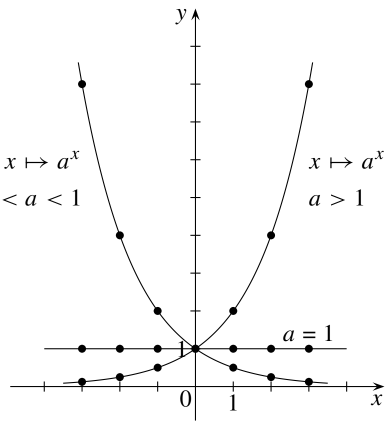
Szembetűnő a két exponenciális függvény menetének különbözősége.

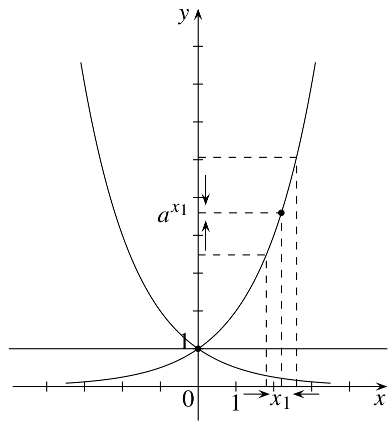
Ha a hatványozás alapja 1-nél nagyobb, akkor a függvény növekvő, képe „emelkedő”.

Ha a hatványozás alapja 1-nél kisebb pozitív szám, akkor a függvény csökkenő értéket vesz fel, és képe „süllyedő”.

*Minden olyan függvényt exponenciális függvénynek nevezünk, amely $x \mapsto a^x$ hozzárendelési szabállyal adható meg, és amelyben $x$ tetszőleges valós szám és $a \neq 1$ pozitív szám.*

A függvények értéke csökkenő, ha $0 < a < 1$. Azt mondjuk, hogy a függvény $0 < a < 1$ esetben *szigorúan monoton csökkenő*. Ha $a > 1$, akkor a függvény *szigorúan monoton növekvő*.




Szigorúan monoton növekvő függvényre igaz, hogy az értelmezési tartomány nagyobb értékéhez nagyobb függvényérték tartozik, szigorúan monoton csökkenő függvény esetében nagyobb függvényértékhez kisebb függvényérték tartozik.

(Néha szokták az $a = 1$ esetet is idesorolni, ekkor $x \mapsto 1^x$ minden $x$-re 1 értéket vesz fel, ennek képe az $x$ tengellyel párhuzamos egyenes.)

Megfigyelhetjük továbbá, hogy a függvényeknek nincs legkisebb és legnagyobb értéke, valamint minden függvény képe az $x = 1$ pontjában metszi az $y$ tengelyt. Ez abból adódik, hogy bármely (nem nulla) szám nulladik hatványa 1: $a^0 = 1$.

Függvényeink grafikonja pontokból állt, hiszen a hatványozást eddig csak egész kitevőre értelmeztük. Fogadjuk el azonban, hogy a törtkitevős hatványozásnak is van értelme, és a kitevő lehet irracionális szám is, és így bármely valós kitevőre értelmezve vannak az exponenciális függvények. A függvényérték rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy kiválasztva egy tetszőleges $x_1$ értéket, minél inkább közelítünk $x_1$-hez (mindkét irányból), a függvényértékek annál inkább megközelítik az $a^{x_1}$ értéket. Tehát a függvény grafikonja folytonos vonal.

## Feladatok

**1.** Készítsünk értéktáblázatot, és ábrázoljuk a következő függvények néhány összetartozó értékpárját!

*a)* $x \mapsto 3^x$; *b)* $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$; *c)* $x \mapsto 1^x$; *d)* $x \mapsto 10^x$.

**2.** Egy asztalitenisz-versenyen minden forduló után a versenyzők fele (a vesztes) kiesik. Jelenleg éppen lezajlott a harmadik forduló, a továbbjutott versenyzők száma 16. Hányan indultak a versenyen, és még hány fordulót kell játszani, hogy egyetlen győztes maradjon? (Döntetlen nem volt.)

**3.** Egy 2 m-es szalagot megfelezünk, majd a kapott részeket ismét elfelezzük, és ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a kapott részek nem lesznek kisebbek 1 cm-nél. Hányadik lépés után következik ez be?

**4.** Egy bankban már 5 éve bent van $x$ forintunk, amelyet 10%-os kamatra tettünk be. Mennyi volt a pénzünk a bankban 1; 2; 3; 4 évvel ezelőtt? Mennyi lesz a pénzünk 1; 2; 3; 4 év múlva, ha közben egyszer sem veszünk ki pénzt, és a kamatlábak nem változnak?

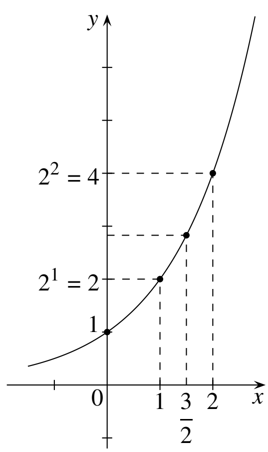
# 2. Törtkitevőjű hatványok, gyökvonás azonosságai

Az előző fejezetben azokban az időpontokban vizsgáltuk a változást, amikor az időpont egész számmal kifejezhető volt. Ezt kellett tennünk, mivel a hatványozást csak egész kitevőre értelmeztük.

A baktériumok azonban állandóan osztódnak, a sugárzó anyag tömege is állandóan fogy. Van értelme tehát annak, hogy megkérdezzük, mennyi baktérium lesz fél perc múlva, három és egynegyed perc múlva. Azt is sejtjük, hogy minél jobban közelítünk (mindkét felől) $x$ értékével például a 2-höz, a függvényértékek is egyre jobban megközelítik a $2^2 = 4$-et.

Tehát a törtkitevőjű hatványokra is szükség van a változás leírásához.

A törtkitevőjű hatványokat úgy célszerű értelmeznünk, hogy a hatványozás tanult azonosságai továbbra is érvényben maradjanak, és a mi konkrét esetünket vizsgálva az is igaz legyen, hogy ha egy $x$ érték például 1 és 2 közé esik, akkor az $x \mapsto 2^x$ függvény értéke $2^1$ és $2^2$ közé essék.




Legyen mondjuk $x = \dfrac{3}{2}$, ekkor $2^1 < 2^{\frac{3}{2}} < 2^2$.

Ahhoz, hogy a tanult $(a^n)^m = a^{nm}$ azonosság igaz maradjon törtkitevők esetében is,

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 2^3 = 8$$

kell legyen.

Ha $2^{\frac{3}{2}}$ négyzete 8, akkor ez azt jelenti, hogy $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$. Ezért célszerű a $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{2^3}$ értelmezést bevezetni. $\sqrt{8} \approx 2{,}282\ldots$, és ez valóban 2 és 4 közé eső szám.

*Értelmezzük a $2^{\frac{1}{3}}$ hatványt!*

$2^{\frac{1}{3}}$ az a szám, amelynek köbe $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$.

Legyen egy kocka térfogata 2 térfogategység. Ennek a kockának az éle $2^{\frac{1}{3}}$. Ezt a négyzetgyökvonáshoz hasonlóan a köbgyök kettőnek (harmadik gyök kettőnek) nevezzük, és így jelöljük: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Ugyanúgy $3^{\frac{1}{5}}$ jelenti azt a számot, amelynek ötödik hatványa éppen három.

Az $\sqrt[5]{3}$-at ötödik gyök háromnak mondjuk. Ennek ötödik hatványa $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 3$.

Ezzel a gyökvonás fogalmát kiterjesztettük tetszőleges pozitív egész kitevőre.

*Azt a számot, amely megmutatja, hogy hányadik gyökről van szó, gyökkitevőnek nevezzük.*

Megállapodunk abban, hogy:

*Ha $a > 0$ valós szám és $n > 1$ egész szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ azt a pozitív számot jelenti, amelynek $n$-edik hatványa $a$, azaz*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Megállapodunk abban is, hogy:

$$\sqrt[n]{0} = 0; \qquad \sqrt[1]{a} = a.$$

Konkrét példán láttuk azt is, hogy $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$. Ezért megállapodhatunk abban, hogy $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Ugyanígy:

*Ha $a > 0$ valós szám, $p$ és $q$ természetes számok (de $q \neq 0$), akkor $a^{\frac{p}{q}}$ jelenti azt a pozitív számot, amelynek $q$-adik hatványa $a^p$, vagyis $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.*

*Értelmezzük még a negatív törtkitevős hatványozást is.*

Ez adódik a már elfogadott negatív egész kitevő értelmezéséből.

Ugyanis az $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ értelmezéséből (ahol $a \neq 0$) következik, hogy célszerű a következő értelmezés:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

*ha $a > 0$ valós szám, $p$ és $q$ természetes számok (de $q \neq 0$).*

Nézzük meg, hogy az ilyen értelmezés mellett érvényben maradnak-e a hatványozás azonosságai!

**1.** *Igaz-e az $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ azonosság?*

Legyen a két hatvány $2^{-\frac{2}{3}}$ és $2^{\frac{2}{3}}$.

$$2^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(A negatív kitevős hatványozás definícióját alkalmaztuk.)

$$2^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{+2}{3}\right)} = 2^0 = 1.$$

(Az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot alkalmaztuk.)

Látjuk, hogy az eredmény megegyezik.

*Bebizonyítható, hogy az $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ azonosság ($a > 0$ valós és $m$, $n$ pozitív egész szám) törtkitevő esetében is igaz.*

**2.** *Számítsuk ki kétféleképpen a $2^{\frac{5}{2}} : 2^{\frac{3}{2}}$ értékét!*

$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5}$; $\quad 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$; régebbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $\dfrac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{a^m}} = \sqrt{\dfrac{a^n}{a^m}}$, ezért:

$$\frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^3}} = \sqrt{2^2} = 2,$$

törtkitevőkre alkalmazva az azonos alapú hatványok osztására tanult azonosságot:

$$2^{\frac{5}{2}} : 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2;$$

az eredmény megegyezik.

*Bebizonyítható, hogy az $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ azonosság ($a > 0$ valós és $m$, $n$ pozitív egész szám) törtkitevő esetében is érvényben marad.*

Az is bizonyítható, hogy az $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ és az $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $(b \neq 0)$ azonosság is érvényben marad, ami gyökökre alkalmazva azt jelenti, hogy

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \text{és} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad (b \neq 0).$$

Azt már a törtkitevő értelmezésénél felhasználtuk, hogy $(a^n)^m = a^{nm}$, ami gyökökre alkalmazva:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

**3.** *Számítsuk ki zsebszámológéppel a $27^{\frac{2}{3}}$ hatvány értékét!*

Az igényesebb számológépeken van hatványozás ($x^y$ vagy $y^x$) gomb, és zárójelhasználati lehetőség is. Az ilyen gépeken így járhatunk el:

Beírjuk a 27-et, majd a hatványozás gombot, azután zárójelben a törtet osztás formában. Ezután megnyomjuk az egyenlőségjel gombot. A gép kiadja az eredményt, a 9-et. Ez 8 lépésben történik:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | $x^y$ vagy $y^x$ | ( | 2 | $\div$ | 3 | ) | = |

**Fontos!**

Ne feledkezzünk meg arról, hogy a törtkitevős hatványozást kizárólag *pozitív alapra* értelmeztük, és hogy a *gyökkitevő* 0*-nál nagyobb egész szám.*

A valós számok körében $a < 0$ esetben a gyökvonásnak csak akkor van értelme, ha a gyökkitevő páratlan szám, vagyis a fenti jelöléssel $m$ is és $n$ is páratlan szám.

*Megjegyzés*

Még mindig nem terjesztettük ki a hatványozás értelmezését a teljes valós számkörre. Hiányzik még az irracionális kitevő értelmezése. Fogadjuk el azonban, hogy a hatványozásnak irracionális kitevő esetén is van értelme, és erre is igaz, hogy amennyiben $x_1 < x < x_2$ és $a > 1$, akkor $a^{x_1} < a^x < a^{x_2}$ (illetve, ha $0 < a < 1$, akkor $a^{x_1} > a^x > a^{x_2}$), valamint ez esetben is érvényben maradnak a hatványozás azonosságai és az exponenciális függvény tulajdonságai.

## Feladatok

**1.** Írjuk fel gyökös alakban a következő hatványokat!

*a)* $10^{\frac{1}{2}}$; *b)* $13^{\frac{3}{2}}$; *c)* $3^{-\frac{1}{3}}$; *d)* $5^{0,2}$;

*e)* $x^{\frac{1}{2}}$; *f)* $x^{\frac{-1}{4}}$; *g)* $b^{-0,5}$; *h)* $y^{\frac{4}{5}}$;

*i)* $(x+y)^{\frac{1}{2}}$; *j)* $a^{-\frac{1}{b}}$; *k)* $(a^2+2ab+b^2)^{\frac{1}{2}}$; *l)* $(x+y)^{-\frac{1}{2}}$.

**2.** Írjuk fel törtkitevős alakban a következő gyököket!

*a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt[3]{3}$; *c)* $\sqrt{2^3}$; *d)* $\sqrt[3]{5^4}$;

*e)* $\sqrt{a}$; *f)* $\sqrt{-a}$; *g)* $\sqrt[3]{b^6}$; *h)* $\sqrt[4]{b^{-2}}$;

*i)* $\sqrt[5]{a+b}$; *j)* $\sqrt[3]{(a-b)^2}$; *k)* $\sqrt[3]{(a-b)^{-2}}$.

**3.** Számítsuk ki a következő hatványokat!

*a)* $16^{\frac{1}{2}}$; *b)* $8^{\frac{2}{3}}$; *c)* $27^{-\frac{1}{3}}$;

*d)* $2^{-2}$; *e)* $3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$; *f)* $100^{-\frac{1}{2}}$;

*g)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; *h)* $(0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$; *i)* $\left(\frac{1}{2^4\cdot 3^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

**4.** Ábrázoljuk a következő függvényeket!

*a)* $x\mapsto x^2$ és $x\mapsto x^{\frac{1}{2}}$; *b)* $x\mapsto x^{-2}$ és $x\mapsto x^{-\frac{1}{2}}$;

*c)* $x\mapsto(-x)^{\frac{1}{2}}$ és $x\mapsto -x^{\frac{1}{2}}$; *d)* $x\mapsto x^{\frac{1}{2}}$ és $x\mapsto x^{-\frac{1}{3}}$.

Írjuk le a függvények menetét!
Hol vannak értelmezve?
Milyen értékeket vehetnek fel?
Milyen $x$ értékekre „emelkedők”, melyekre „süllyedők”?
Van-e legnagyobb, illetve legkisebb értékük?
Ha van, mely $x$ értékre veszik ezt fel?

**5.** Ábrázoljuk a következő függvényeket!

*a)* $x \mapsto 2^x$; *b)* $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$; *c)* $x \mapsto 3^x$; *d)* $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Írjuk le a függvények menetét!

Hol vannak értelmezve, milyen értékeket vehetnek fel, milyen értékekre emelkedők, süllyedők, és van-e legnagyobb, illetve legkisebb értékük?

**6.** Melyik a nagyobb?

*a)* $\sqrt[4]{16}$ vagy $\sqrt[6]{27}$; *b)* $\sqrt[8]{10\,000}$ vagy $\sqrt[6]{1000}$; *c)* $\sqrt[3]{64}$ vagy $\sqrt[4]{144}$.

**7.** Írjuk törtkitevős alakra, és amelyiknél lehet, egyszerűsítsük a következő kifejezéseket!

*a)* $\sqrt[3]{a^9}$; *b)* $\sqrt[4]{x^3}$; *c)* $\sqrt[6]{x^3y^2}$; *d)* $\sqrt[n]{x^{3n}}$.

**8.** Emeljük ki a gyökjel alól a szorzat minél több tényezőjét!
(A számokat bontsuk törzstényezőkre!)

*a)* $\sqrt[3]{54}$; *b)* $\sqrt[3]{16}$; *c)* $\sqrt[3]{250}$; *d)* $\sqrt[3]{72}$; *e)* $\sqrt[3]{8a^2}$; *f)* $\sqrt[3]{5x^3}$.

**9.** Vigyük be a szorzókat a gyökjel alá!

*a)* $2 \cdot \sqrt[3]{5}$; *b)* $-3\sqrt{3}$; *c)* $-2\sqrt[3]{4}$; *d)* $a\sqrt{b}$; *e)* $a\sqrt[3]{b}$; *f)* $3 \cdot \sqrt[3]{x}$.

**10.** Írjuk közös gyökjel alá a szorzatokat, és számítsuk ki az értéküket!

*a)* $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$; *b)* $\sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{4}$; *c)* $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{36}$;

*d)* $2 \cdot \sqrt[4]{2}$; *e)* $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{4}$.

**11.** Végezzük el a következő műveleteket!

*a)* $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$; *b)* $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$; *c)* $y^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{4}{6}}$;

*d)* $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{3}{4}}$; *e)* $x^{\frac{2}{3}} : x^{-\frac{1}{2}}$; *f)* $y^{-\frac{2}{3}} : y^{-\frac{1}{2}}$;

*g)* $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$; *h)* $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$; *i)* $\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

**12.** Számítsuk ki a következő műveletek végeredményét!

*a)* $4\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$; *b)* $\dfrac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$; *c)* $2 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{81}{8}}$;

*d)* $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[12]{125}$; *e)* $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; *f)* $\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$;

*g)* $\sqrt[5]{81\sqrt{32}}$; *h)* $\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}$.

# 3. Számok logaritmusa, műveletek logaritmussal

A hatványokkal végzett műveletek során tapasztalhattuk, hogy azonos alapú hatványok szorzása, osztása, hatványozása egyszerűen elvégezhető a kitevők összeadásával, kivonásával, szorzásával.

Műveleteink elvégzését megkönnyítené, ha bármely számot fel tudnánk írni egy alkalmasan megválasztott alap hatványaként. Azzal, hogy a hatványozást értelmeztük a teljes (valós) számkörre, erre lehetőségünk van.

Azt a *kitevőt,* amelyre 10-et hatványozni kell, hogy az illető számot megkapjuk, a *szám* 10-*es alapú logaritmusának* nevezték el.

Például $10^5 = 100\,000$, a 100 000 tízes alapú logaritmusa 5.

Ezt így jelöljük: $\lg 100\,000 = 5$

*Megjegyzés*

A számolás megkönnyítésére táblázatokat készítettek számok 10 hatványaiként történő felírására. Többen foglalkoztak ezzel. Lényegében a XII. századra készült el a ma ismert logaritmustáblázat. Készítői John Napier (1550–1617) skót matematikus és barátja, Henry Briggs (1561–1630) angol matematikusok voltak.

Ma már nagyon ritkán számolunk logaritmustáblázat segítségével. A zsebszámológépek többsége tud logaritmussal számolni. Ezeken a gépeken van olyan gomb, amely megadja egy adott szám tízes alapú logaritmusát, illetve a szám logaritmusából a keresett számot.

A logaritmus azonosságait azonban ismernünk kell akkor is, ha a számolást zsebszámológéppel végezzük.

Az előzőekben láttuk, hogy a logaritmus: *kitevő*. Ezért a logaritmussal végzett műveletekre is érvényesek azok az azonosságok, amelyek a törtkitevős hatványozásra.

**1.** *Számoljuk ki logaritmus segítségével a következő szorzatot!* $37{,}6 \cdot 5{,}08$.

Írjuk fel a tényezők logaritmusát! $\lg 37{,}6 \approx 1{,}5752$, $\lg 5{,}08 \approx 0{,}7059$

$$37{,}6 \cdot 5{,}08 \approx 10^{1{,}5752} \cdot 10^{0{,}7059} = 10^{1{,}5752 + 0{,}7059} = 10^{2{,}2811}.$$

Ezért a műveletet így írhatjuk:

$$\lg(37{,}6 \cdot 5{,}08) = \lg 37{,}6 + \lg 5{,}08 \approx 1{,}5752 + 0{,}7059 = 2{,}2811.$$

A kapott szám az a kitevő, amelyre 10-et emelve megkapjuk a szorzat értékét, vagyis a keresett szám: $10^{2{,}2811}$. A 2,2811 kitevőhöz tartozó értéket zsebszámológéppel visszakeresve kapjuk, hogy $37{,}6 \cdot 5{,}08 \approx 191$.

**2.** *Számoljuk ki logaritmus segítségével a* $2{,}74 : 0{,}0382$ *hányadost!*

$\lg(2{,}74 : 0{,}0382) = \lg 2{,}74 - \lg 0{,}0382 \approx 1{,}8557$, visszakeresve: 71,73.

**3.** *Számoljuk ki logaritmus segítségével a következő köbre emelést:* $739^3$*!*

$\lg 739^3 = 3 \cdot \lg 739 \approx 3 \cdot 2{,}8686 = 8{,}6058$, visszakeresve: $4{,}035 \cdot 10^8$.

**4.** *Számoljuk ki logaritmus segítségével az* $\sqrt[5]{27{,}6}$*-et!*

$$\sqrt[5]{27{,}6}; \quad \lg \sqrt[5]{27{,}6} = \frac{\lg 27{,}6}{5} \approx \frac{1{,}4409}{5} \approx 0{,}2881; \quad \sqrt[5]{27{,}6} \approx 1{,}942.$$

Az alkalmazott azonosságok logaritmusformában kifejezve:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b,$$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

$$\lg a^n = n \lg a,$$

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n},$$

ahol $a$ és $b$ pozitív számok, $n$ pozitív egész szám, de $n \neq 1$.

Az $a$-ra és $b$-re tett kikötés fontos, ugyanis 10-nek akárhányadik hatványa csak pozitív szám lehet.

Előfordul, hogy negatív számokkal végzett műveleteket akarunk logaritmussal elvégezni. Ilyenkor a negatív számok helyett az ellentettjükkel végezzük el a műveletet, és a kapott eredményt utólag látjuk el a megfelelő előjellel, például:

$$(-0{,}921) \cdot 0{,}0253.$$

$-0{,}921$ helyett $0{,}921$ logaritmusával számolunk, majd a végeredményben tesszük ki a negatív előjelet:

$$\lg (0{,}921 \cdot 0{,}0253) = \lg 0{,}921 + \lg 0{,}0253 \approx 0{,}3674 - 2,$$

visszakeresés után: $2{,}33 \cdot 10^{-2} = 0{,}0233$.

Az eredeti feladat szerint az eredmény negatív szám, tehát

$$-0{,}921 \cdot 0{,}0253 = -0{,}0233.$$

**Figyeljünk** továbbá arra is, hogy azonos alapú, de különböző kitevőjű hatványokat nem tudunk közvetlenül sem összeadni, sem kivonni. Ha több tagból álló műveletsort akarunk logaritmus segítségével elvégezni, akkor a következőképpen járunk el:

Végezzük el először logaritmus segítségével a hatványozást, szorzást, osztást, majd visszakeresés után az összeadást, kivonást.

Természetesen nemcsak 10 hatványaiként írható fel bármely (valós) szám, hanem bármely $a > 0$; $a \neq 1$ alap hatványaként is. *Például:*

$2^5 = 32$, ezért $\log_2 32 = 5$ vagy

$3^3 = 27$, ezért $\log_3 27 = 3$.

(A 10-es alapú logaritmus jele az lg, a nem tízes alapú logaritmusok esetében mindig ki kell írni az alapot is, valamint lg helyett a log rövidítést használjuk.)

*Azt a kitevőt, amelyre az $a > 0$; $a \neq 1$ számot emeljük, hogy a c pozitív számot kapjuk, a c szám a alapú logaritmusának nevezzük.*

*Ha $a^b = c$, akkor $\log_a c = b$ (b tetszőleges valós szám).*

*A logaritmus definíciója röviden:*

$$a^{\log_a b} = b.$$

*Mivel minden szám 0-adik hatványa 1; ezért:*

$$\log_a 1 = 0.$$

A tízes alapú logaritmusra tanult azonosságok érvényesek tetszőleges $a$ alapú logaritmusra is, ha $a > 0$; $a \neq 1$ *valós szám:*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0,\ y > 0);$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x > 0,\ y > 0);$$
$$\log_a x^k = k \log_a x \quad (x > 0,\ k \text{ valós szám});$$
$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \quad (x > 0,\ n > 1 \text{ és } n \text{ egész szám}).$$

### Feladatok

**1.** Írjuk fel logaritmus alakban a következő hatványokat!

$3^2 = 9$; $12^2 = 144$; $5^3 = 125$; $8^3 = 512$.

(Az alap maradjon változatlan!)

**2.** Mivel egyenlők a következő logaritmusok?

$\lg 1000$; $\lg 100$; $\lg 10$; $\lg 1$;

$\lg 0{,}1$; $\lg 0{,}01$; $\lg 0{,}001$; $\lg 0{,}0001$.

**3.** Mivel egyenlők a következő logaritmusok?

*a)* $\log_2 16$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 8$; $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_2 4$; $\log_2 \frac{1}{8}$; $\log_2 2$; $\log_2 \frac{1}{16}$;

*b)* $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$; $\log_{\frac{1}{2}} 2$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$; $\log_{\frac{1}{2}} 4$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{2}} 8$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} 1$;

*c)* $\log_3 9$; $\log_5 125$; $\log_3 27$; $\log_4 \frac{1}{16}$; $\log_7 49$; $\log_6 \frac{1}{36}$; $\log_3 1$; $\log_{0,3} 0{,}09$.

**4.** Mennyi a következő számok 10-es alapú logaritmusa?

*a)* 3,78; 27,6; 0,13; *b)* 35 000; 0,000 173; 2 080 000.

**5.** Állapítsuk meg, hogy mely számok logaritmusai:

0,2209; 3,2209; 0,2209 – 1; 5,2209!

**6.** Végezzük el logaritmus segítségével a következő műveleteket!

*a)* $0{,}072 \cdot 37$; $0{,}000\,038 \cdot 142$; *b)* $749 : 38{,}2$; $0{,}549 : 35$;

*c)* $197^5$; $0{,}006\,82^3$; $12{,}6^4$; $3{,}4^{-2}$; $705^{-4}$; $0{,}02^{-5}$;

*d)* $\sqrt{15{,}9}$; $\sqrt[3]{490}$; $\sqrt[7]{0{,}000\,000\,000\,8}$; *e)* $\dfrac{139 \cdot 7{,}68^3 - 0{,}9 \cdot 27^2}{0{,}006 \cdot \sqrt[3]{154 + 3{,}09 \cdot 831}}$.

# 4. Logaritmusfüggvény

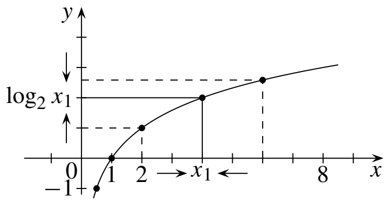
**1.** *Rendeljük hozzá minden pozitív (valós) számhoz azt a kitevőt, amelyre 2-t emelve az adott számot kapjuk!*

*Ábrázoljuk a függvény értékpárjait! Összeköthetjük-e a pontokat folytonos vonallal?*

Másként fogalmazva, minden pozitív számhoz rendeljük hozzá a 2-es alapú logaritmusát.

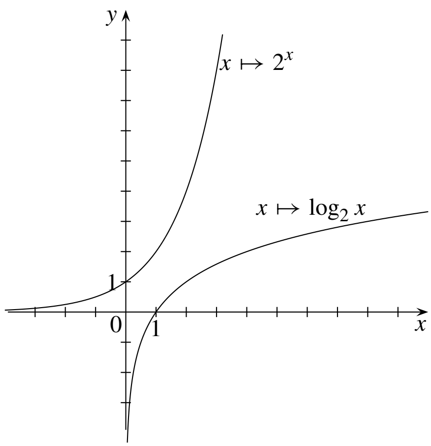
A függvény így írható le: $x \mapsto \log_2 x$, és a neve: 2-*es alapú logaritmusfüggvény*. Ábrázoljuk a függvény néhány könnyen megadható értékpárját!

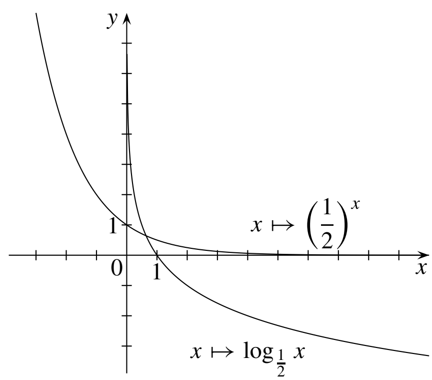
| $x$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_2 x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |




Azt mondjuk, hogy a függvény minden pozitív számra értelmezve van. Most már csak azt kell tudnunk, hogy ha egy tetszőleges $x_1$ helyen kiszámítjuk a függvény értékét, akkor igaz-e a következő: Minél jobban megközelítjük azt az $x_1$ értéket, a függvényértékek annál inkább megközelítik a $\log_2 x_1$ értéket.

Ennek eldöntésében segít nekünk az exponenciális függvény, amelyről tudjuk, hogy képe megrajzolható folytonos vonallal. Az $x \mapsto 2^x$ függvény a 2-es alap kitevőjéhez rendeli a hatványt, fordítva, mint a logaritmusfüggvény, amely a hatványhoz rendeli a 2-es alap kitevőjét.




Tehát az egyik függvény értelmezési tartománya megegyezik a másik függvény értékkészletével és megfordítva. A két függvény egymás „megfordítottja”, idegen szóval *inverze.* Az exponenciális függvényről tudjuk, hogy képe folytonos vonal, de akkor az inverze is az.

Általában:

*Az $x \mapsto \log_a x$ függvényt, amelyben $x$ pozitív valós szám és $a > 0$, $a \neq 1$, $a$ alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük.*

Az $x \mapsto \log_a x$ függvény inverze az $x \mapsto a^x$ exponenciális függvénynek, amelyben $x$ valós szám, $a > 0$, $a \neq 1$.

Vizsgáljuk meg a logaritmusfüggvény viselkedését!

A logaritmusfüggvények értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, értékkészletük a valós számok halmaza.

Ha $a > 1$, akkor a függvény „emelkedő”, ha $0 < a < 1$, akkor „süllyedő”.

A függvényeknek nincs sem legnagyobb, sem legkisebb értékük.

A függvények grafikonjai az $(1;0)$ koordinátájú pontokon haladnak keresztül, mert $x^0 = 1$ bármely pozitív $x$-re, így $\log_x 1 = 0$.

**Feladatok**

**1.** Mely $x$ értékekre vannak értelmezve a következő függvények?

*a)* $x \mapsto \lg(-x)$; *b)* $x \mapsto -\lg x$; *c)* $x \mapsto \log_2(x-1)$; *d)* $x \mapsto \log_a x^2$;

*e)* $x \mapsto \log_a \sqrt{x}$; *f)* $x \mapsto \log_a \sqrt{-x}$; *g)* $x \mapsto \log_a(-\sqrt{x})$; *h)* $x \mapsto \log_a \frac{1}{x}$.

**2.** Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két-két függvényt!

*a)* $x \mapsto 3^x$ és $x \mapsto \log_3 x$; *b)* $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ és $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$.

# 5. Exponenciális és logaritmusos egyenletek

**1.** *Mely x értékre igaz a* $2^x = 8$ *egyenlet?*

Tudjuk, hogy 2-nek harmadik hatványa 8, vagyis $2^3 = 8$; tehát $x = 3$ megoldása az egyenletnek.

Ez az egyetlen megoldása, hiszen 2-nek csak a harmadik hatványa 8.

Az ilyen egyenletet, amelyben az ismeretlen a kitevőben szerepel, *exponenciális egyenletnek* nevezzük.

**2.** *Oldjuk meg a* $\frac{3^{2x-5}}{3^x} = 3^6$ *egyenletet!*

Az egyenlet bal oldalán ugyanannak a számnak a hatványai szerepelnek. Tudjuk, hogy az azonos alapú hatványok osztásakor az új kitevő az osztandó és az osztó kitevőjének különbsége:

$$\frac{3^{2x-5}}{3^x} = 3^{2x-5-x} = 3^{x-5}; \qquad 3^{x-5} = 3^6.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton függvény, ezért az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x - 5 = 6$.

*Megjegyzés*

Szigorúan monoton függvények esetében ugyanaz a függvényérték nem tartozhat két vagy több értékhez, vagyis minden egyes függvényérték csak az értelmezési tartomány egyetlen értékéhez tartozik.

Oldjuk meg az egyenletet! A megoldás $x = 11$.

Ellenőrizzük eredményünket!

$$\frac{3^{2\cdot 11-5}}{3^{11}} = 3^6; \qquad \frac{3^{17}}{3^{11}} = 3^6; \qquad 3^6 = 3^6.$$

**3.** *Oldjuk meg az* $5^{2x} \cdot 5^{x+3} = 5^{x-1}$ *egyenletet!*

Azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosság alapján:

$$5^{2x+x+3} = 5^{x-1}.$$

Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $3x + 3 = x - 1$, vagyis: $2x = -4$. Ebből: $x = -2$.

És valóban: $5^{2(-2)} \cdot 5^{-2+3} = 5^{-2-1}$; ami: $5^{-4} \cdot 5^{1} = 5^{-3}$.

**4.** *Oldjuk meg a* $4^{2x-1} = \frac{1}{8}$ *egyenletet!*

A 4 is és a 8 is 2-nek hatványa. $4 = 2^2$; $8 = 2^3$.

Ezért az egyenletet átalakíthatjuk úgy, hogy abban azonos alapú hatványok legyenek:

$$(2^2)^{2x-1} = \frac{1}{2^3}.$$

$2^{2(2x-1)} = 2^{4x-2}$ és $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; ezért: $2^{4x-2} = 2^{-3}$, ez viszont csak akkor lehetséges, ha $4x - 2 = -3$, amiből $4x = -1$, így $x = -\frac{1}{4}$. (Ellenőrizzük!)

**5.** *Oldjuk meg a* $17^{2x+3} = 1$ *egyenletet!*

Tudjuk, hogy minden (nem nulla) valós szám nulladik hatványa 1. $17^{2x+3} = 17^0$.

17-nek csak a nulladik hatványa lehet 1. Ezért $2x + 3 = 0$; amiből $x = -\frac{3}{2}$.

Eddig minden feladatot úgy oldottunk meg, hogy azonos alapú hatványokká alakítottuk az ismeretlent tartalmazó tagokat, illetve tényezőket. Ez azonban nem minden esetben sikerül.

Nézzünk erre is példát!

**6.** *Mely x értékekre lesz igaz a* $\frac{2^x}{5^x} = \frac{24}{45}$ *egyenlőség?*

Ez is exponenciális egyenlet, de ezt nem tudjuk megoldani az eddig látott módszerekkel.

Alakítsuk át az egyenletet a tört hatványozására vonatkozó azonosság alapján: $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{24}{45}$; ami ugyanaz, mint a $0{,}4^x = \frac{24}{45}$.

Tudjuk továbbá, hogy ha $a^x = b$ számmal, akkor a logaritmus szigorú monotonitása miatt a logaritmusuk is egyenlő.

Vegyük mind a két oldal tízes alapú logaritmusát:

$$\lg 0{,}4^x = \lg \frac{24}{45}.$$

Ez már egy logaritmusos egyenlet.

A logaritmus azonosságai alapján tudjuk, hogy:

$$\lg 0{,}4^x = x \lg 0{,}4 \quad \text{és} \quad \lg \frac{24}{45} = \lg 24 - \lg 45.$$

Az egyenlet ezért így írható:

$$x \lg 0{,}4 = \lg 24 - \lg 45;$$

ebből az $x$ változó kifejezhető: $x = \dfrac{\lg 24 - \lg 45}{\lg 0{,}4}$.

Ebben a formában már az egyenlet jobb oldalán számok logaritmusa szerepel, a műveletek így zsebszámológéppel könnyen elvégezhetők:

$$x \approx \frac{1{,}3802 - 1{,}6532}{-0{,}3979} = \frac{-0{,}2730}{-0{,}3979} \approx 0{,}686.$$

**7.** *Oldjuk meg a* $27 \cdot 2^{x+1} = 6^x$ *egyenletet!*

Vegyük észre, hogy $27 = 3^3$; $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2^x \cdot 2$ és $6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x$.

Ezt alkalmazva az egyenlet ilyen alakúra alakítható:

$$3^3 \cdot 2^x \cdot 2 = 2^x \cdot 3^x;$$

osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $2^x$-nel (ezt megtehetjük, hiszen $2^x \neq 0$).

$3^3 \cdot 2 = 3^x$; vagyis $54 = 3^x$; vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 54 = x \lg 3$, amiből:

$$x = \frac{\lg 54}{\lg 3}; \qquad x \approx \frac{1{,}7324}{0{,}4771} \approx 3{,}6311.$$

**8.** *Egy bizonyos összeget 5%-os kamatra tettünk be egy pénzintézetbe. Hány év múlva kétszereződik meg a betett összeg?*

Az 5%-os kamat mellett az összeg egy év elteltével 5%-kal nő, ami azt jelenti, hogy az eredeti összeg 1,05-szorosára nő.

Ha a betett összeg $a$, akkor egy év múlva $a \cdot 1{,}05$ lesz az összeg.

2 év múlva az előző évi összeg nő 1,05-szorosára, ami az eredeti összeg $1{,}05 \cdot 1{,}05 = 1{,}05^2$-szerese, vagyis $a \cdot 1{,}05^2$.

$n$ év elteltével az eredeti összeg $1{,}05^n$-szeresére nő.

Ha az összeg $n$ év múlva kétszerese lesz az eredetileg betett összegnek, akkor ezt így írhatjuk fel:

$$a \cdot 1{,}05^n = 2a,$$

egyszerűsítsünk $a$-val: $1{,}05^n = 2$.

Ez is exponenciális egyenlet, amelyet logaritmizálva tudunk megoldani:

$$n \cdot \lg 1{,}05 = \lg 2;$$

ebből
$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx 14{,}19.$$

Vagyis, ha közben nem veszünk ki pénzt, a 15. évben duplázódik meg a betett összeg.

**9.** *Mely x értékre igaz a* $\log_3 81 = x$ *egyenlőség?*

Tudjuk, hogy a logaritmus definíciója szerint az egyenlet a következő alakba írható: $3^x = 81$; 81 pedig 3-nak a negyedik hatványa, vagyis $3^x = 3^4$.

Tehát az egyenlet megoldása $x = 4$.

**10.** *Oldjuk meg az* $\log_5 \frac{1}{25} = x$ *egyenletet!*

$\frac{1}{25} = 5^{-2}$; ezért $\log_5 5^{-2} = x$; $x = -2$.

**11.** *Oldjuk meg a* $\log_2 x = 4$ *egyenletet!*

Mielőtt a megoldáshoz hozzálátnánk, nézzük meg, hogy a $\log_2 x$-nek mely $x$ értékekre van értelme (mi az egyenlet értelmezési tartománya)!

2-nek bármely valós hatványa csak pozitív szám lehet, tehát az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza.

A logaritmus definíciója szerint $2^4 = x$; $2^4 = 16$; ezért $x = 16$.

**12.** *Oldjuk meg az* $\log_x \frac{1}{125} = -3$ *egyenletet!*

Most is vizsgáljuk meg, mely $x$ értékekre van értelme az egyenletnek. Definíció szerint $x > 0$ és $x \neq 1$ esetben az egyenletnek van értelme.

$\frac{1}{125} = 5^{-3}$; ezért $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, vagyis $x = 5$. Ez az érték beletartozik az egyenlet értelmezési tartományába, tehát megoldása az egyenletnek.

**13.** *Mely x értékre igaz a* $\lg 2x = \lg(x - 3)$ *egyenlőség?*

A logaritmus definíciójából következik, hogy csak $x > 3$ esetén van értelme az egyenletnek.

Itt tízes alapú logaritmusról van szó. $\lg 2x$ az a kitevő, amelyre 10-et emelve $2x$-et kapunk. $\lg(x - 3)$ az a kitevő, amelyre 10-et emelve $(x - 3)$-at kapunk. Ha a két kitevő megegyezik, akkor a hatvány is megegyezik, tehát: $2x = x - 3$, amiből $x = -3$.

Ez az érték azonban nem megoldása az egyenletnek, hiszen ez esetben $\lg(x - 3) = \lg(-6)$, márpedig 10-nek egyetlen valós kitevős hatványa sem lehet negatív.

**14.** *Oldjuk meg az* $5^{x+1} - 5^x = 20$ *egyenletet!*

$5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$, ezért az egyenletet így is felírhatjuk: $5 \cdot 5^x - 5^x = 20$; ebből: $(5 - 1)5^x = 20$; $5^x = 5$; amiből $x = 1$.

## Feladatok

**1.** Oldjuk meg a következő egyenleteket!

*a)* $3^x = \frac{1}{9}$; *b)* $5^x = \frac{1}{625}$; *c)* $2 \cdot 3^x = 18$; *d)* $2^{x+1} = \frac{1}{64}$;

*e)* $4^x \cdot 5^x = \frac{1}{400}$; *f)* $3^{x-1} - 3^{x-2} = \frac{1}{3}$; *g)* $2^{(x-3)(x-5)} = 1$; *h)* $2^x + 3^{4x} = 0$.

**2.** Oldjuk meg a következő egyenleteket!

*a)* $\log_3 x = 2$; *b)* $\lg x = -3$; *c)* $\log_5 x = 3$;

*d)* $\log_2 x = 6$; *e)* $\lg 100 = x$; *f)* $\log_7 49 = x$;

*g)* $\log_6 x = -3$; *h)* $\log_x 144 = 2$; *i)* $\log_x \frac{1}{36} = 2$;

*j)* $\log_x 121 = -2$; *k)* $\lg (x - 3) = 6$; *l)* $\lg (x - 3) = \lg (3 - x)$;

*m)* $\lg (2x - 3) = \frac{1}{2} \lg x$.