

Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joubert, 19. századi filozófus)

Kedves Gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt Nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelseit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük: **TUDNI KELL!**

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:



Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.



Amit korábban tanultatok, és már tudnotok kellene.



Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el.

1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapeladat, ezt meg kell tudnotok oldani a továbbhaladáshoz.
2. Az új ismeret alkalmazását, tudásotok rögzítését, elmélyítését segítő feladat.
3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.



4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.



Internettel támogatott feladatok

A tankönyvben található **Kiegészítő tananyagokat** a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak írtuk. A hozzájuk kapcsolódó feladatokat is a fentebb leírt szintekbe soroltuk, de más színnel jelöltük, például: **25.**

A fentiekén kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: **123.** Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold” típusú feladatoknál mindig a füzetetekbe dolgozzatok!

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Ha szabadidőtökben is szívesen foglalkoztok matematikafeladatokkal, akkor figyelmetekbe ajánljuk: Abacus Matematikai Lapok 10–14 éveseknek (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekéért Alapítvány folyóirata)

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány)

Róka Sándor: *Egypercesek – Feladatok matematikából* (Tóth Könyvkereskedés)

Imreczené-Reiman–Urbán: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.)

Eredményes tanulást kívánunk: *a Szerzők.*

Törd a fejed!

Skatulyaelv

Példa

A 7. *a* osztály haladó angolcsoportjába 20 tanuló került. Az osztályteremben, ahol az angolórák lesznek, mindössze 19 pad van.

Igaz-e, hogy akárhogyan ültetjük le a 20 tanulót, biztosan lesz legalább egy olyan pad, amelyikben legalább ketten ülnek? Lehetséges-e, hogy dolgozatírásnál minden tanuló külön padban ül?

Megoldás



A tanulók ülhetnek kettesével, hármasával, négyesével... (ahányat a padméret megenged). Ezek teljesítik a feladat „legalább ketten ülnek” követelményét.

Ha minden padban csak egy gyerek ül, akkor a 19 padba összesen 19 tanulót tudunk leültetni. Így a kimaradt egy tanuló csak olyan padba kerülhet, ahol már egyvalaki ül. Tehát lesz egy pad, amelyben ketten ülnek.

Ebben a feladatban a tanulók száma eggyel több, mint a padok száma, ezért legalább egy padban biztosan legalább ketten ülnek, így a dolgozatírásnál nem jut mindenkinek külön pad.

Megjegyzés: Ha egy feladatban $n + 1$ elemet kell n „rekeszbe” vagy „skatulyába” elhelyezni, akkor legalább egy rekeszbe legalább két elem kerül. Ezt a matematikában skatulyaelvnek nevezzük.

Feladatok

- 1.** Egy zöldségbolt ládájában 20 fürt fehér, 8 fürt vörös és 12 fürt kék szőlő van. Az eladó nem néz oda, miközben szedi a zacskóba a szőlőt. Hány fürt szőlőt kell kivennie a ládából, hogy a zacskóban biztosan legyen
 - a) 1 fürt fehér,
 - b) 1 fürt vörös,
 - c) 1 fürt kék szőlő?
- 2.** Legalább hány embernek kell lennie abban a társaságban, amelyben biztosan találunk kettőt olyat, akinek a születésnapja
 - a) ugyanabban a hónapban van,
 - b) ugyanarra a betűre végződő hónapban van,
 - c) ugyanazzal a betűvel kezdődő hónapban van?

3. A kézművesszakkörön a gyöngyfűzéshez a tanárnő minden gyereknek elkészített egy zacskó gyöngyöt, amelybe 20 piros, 16 kék, 25 sárga, 15 lila és 24 zöld színű gyöngyöt tett. Ha a zacskóba nem lehet belelátni, legalább hány gyöngyöt kell kivenni ahhoz, hogy köztük legyen



- a) piros vagy kék,
- b) piros és kék,
- c) két különböző szín,
- d) valamelyik színből legalább három,
- e) az összes sárga,
- f) valamelyik színből az összes?

Halmazok

Példa

A 28 fős 7. b osztály őszi kirándulásán háromfogásos ebédet kaptak a gyerekek. Borsóleves, csirkepörkölt és almás pite volt a menü. Mivel ebéd előtt mindenféle finomságokkal kínálgatták egymást, sokan nem tudtak enni mind a háromféle ételből.

Borsólevest és csirkepörköltet négy tanuló, csirkepörköltet és almás pitét öt tanuló, borsólevest és almás pitét hét tanuló evett. Mindhárom ételből csak hárman ettek.

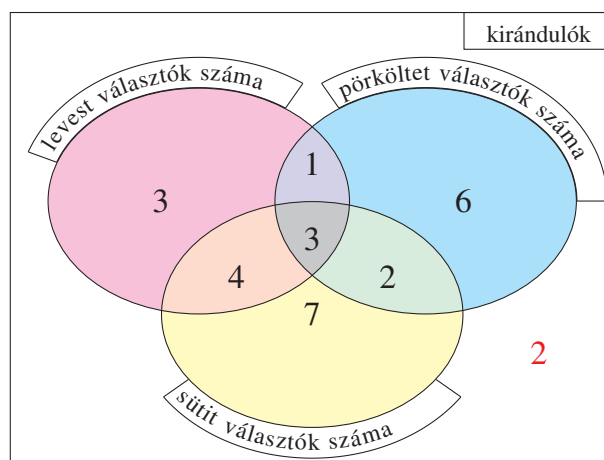
Csak egyféle ételt összesen 16-an fogyasztottak: hárman borsólevest, hatan csirkepörköltet, heten almás pitét. Hányan nem ettek egyáltalán ebédet?

Megoldás

A feladatot halmazábra (Venn-diagram) segítségével oldjuk meg. A halmazábra egyes részeibe az egy, kettő, illetve három fogást fogyasztó tanulók száma kerül. Azok, akik mindháromból ettek, nyilván ettek kétfélét is (levest és sütit vagy levest és pörköltet vagy pörköltet és sütit).

Az ábra kitöltését a három halmaz közös részével, középen kezdjük, ide beírjuk a 3-at. A **csak** kétfélét evők számát akkor kapjuk meg, ha a két fogást evők megadott számából levonjuk a három fogást evők számát. Például: levest és sütit 7-en ettek, de közülük 3-an háromfélét is, így $7 - 3 = 4$ olyan gyerek volt, aki **csak** levest és sütit evett. Hasonló gondolatmenettel töltjük ki a halmazábra többi részét.

A „kirándulók” feliratú téglalapba rajzolt három halmazba az ebédelők száma, azon kívül a nem ebédelők száma kerül. A legalább egyféle ételt evők száma tehát: $3 + 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 7 = 26$. Összesen 28-an voltak, ha ebből kivonjuk az ebédelők számát, akkor megkapjuk a nem ebédelők számát: $28 - 26 = 2$. A kirándulásán tehát **két** tanuló nem ebédelt.



Feladatok

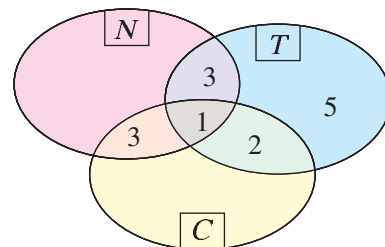
1. A 48-nál nem nagyobb pozitív egészek közül hány szám osztható

- a) 3-mal;
- b) 4-gyel;
- c) 3-mal is és 4-gyel is;
- d) 3-mal vagy 4-gyel;
- e) 4-gyel, de 3-mal nem?

Készíts halmazábrát!

2. A nyári táborozás egyik napján 22-en fagylaltoztak. A gyerekek egy- vagy kétgombócos fagyit vettek, 18-an csokoládét, 16-an epret. Hányan vettek kétgombócos fagylaltot, ha tudjuk, hogy senki nem evett két egyforma gombócot, és mindenki csokoládé- és eperfagylalt közül választott.

3. A nyári szünetben a gyerekek a nagymamájuknál (N), vagy valamilyen közösségi táborban (T), vagy a családdal nyaraltak (C). A halmazábrába a számok az élménybeszámolók alapján kerültek.



Másold le a füzetedbe a halmazábrákat, és töltsd ki a hiányzó adatokat, ha azt is megtudtuk, hogy a nagymamánál 2-vel kevesebben, a családdal pedig 4-gyel kevesebben voltak nyaralni, mint ahányan táborban! Hány tanuló volt a nagyinál, és hány a családdal? Hányan nyaraltak összesen?

4. Egy 40 fős évfolyam 75%-a sportol, a futball- vagy a kosárlabdaedzések valamelyikére jár. A sportolók 70%-a futballozik, 60%-a pedig kosárlabdázik. Hányan látogatják mindkét edzést, és hányan járnak csak az egyik, illetve csak a másik sportfoglalkozásra?

Kombinatorika

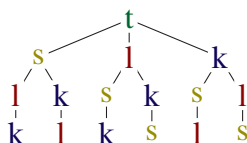
Példa

Ákos négyféle autós matricát kapott: terepjárót (t), sportkocsit (s), limuzint (l) és kombit (k), mindegyik fajtából egyet-egyet. Az új matricákat egy sorba beragasztja a többi mellé. Hányféle sorrendben kerülhetnek az új matricák a gyűjtőfüzetbe?

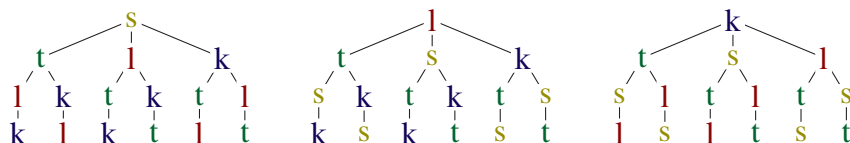
Megoldás

A sorba rendezés közben a négy matrica közül bármelyik kerülhet bármelyik helyre. Az eseteket fadiagrammal szemléltetjük.

Először tegyük a terepjárót az első helyre. Ebben az esetben 6 különböző sorrendet találtunk.



Ugyanezt kapjuk, ha a sportkocsit, vagy a limuzint, vagy a kombit tesszük az első helyre. Ez összesen $4 \cdot 6 = 24$ különböző sorrendet jelent.



A feladat megoldása a matricák véletlenszerű kihúzásával is elképzelhető úgy, hogy a kihúzott matricát nem tesszük vissza a dobozba. Így az első helyre 4-féle, a másodikra 3-féle, a harmadikra 2-féle, a negyedikre 1-féle matrica választható, ami $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ különböző kihúzási sorrendet eredményez.

Feladatok

1. 3 cm-es piros, kék, sárga és zöld szívószálaink vannak, mindegyikből egy. Ezeket cérnával egymáshoz fűzzük. Hányféle különböző színsort tudunk készíteni?
2. Hányféleképpen állítható egy körbe 6 gyerek, ha azonosnak tekintjük az olyan köröket, ahol az egyes gyerekek jobb oldali és bal oldali szomszédjai változatlanok?
3. A nyári táborban a gyerekek körjátékot játszanak. Egy nagy kört alkotnak úgy, hogy egymástól egyenlő távol állva, mindenkinek van átellenes párja. (Az átellenes párok a kör egy átmérőjének két végpontjában állnak.) Valamelyik gyerektől 1-es számmal kezdve sorban mindenki kap egy sorszámot. Hányan állnak a körben, ha a 7-es számú gyerekekkel átellenben a 19-es sorszámu áll?
4. A pöttyös dominón 0-tól 9-ig lehetnek pontok. Hány darabból áll a teljes készlet?
5. Szerezzünk zenét! Készítsünk különböző ritmusokat!



- a) Hányféle különböző ritmusképletet lehet készíteni az ábrán látható három ritmusérték segítségével, ha mindegyiket csak egyszer használhatjuk?
- b) Hányféle három hangból álló dallammotívum készíthető, ha az ötvonalas kottapapíron a hangjegyeket csak vonalra, illetve azok közé helyezhetjük, és a dallamok készítésénél csak egyféle értékű kottafejet használunk?

Logika

Példa

a) Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását!

1. Ha **nyár van**, akkor **nincs tanítás**.
2. Ha egy gyerek **13 éves**, akkor **iskolába jár**.

b) Fogalmazzuk meg az állítások tagadását!

1. Ez az **úszómedence mély**.
2. **Minden gyerek szereti** a kalandparkot.
Vagy, ami ezzel egyenértékű:
Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a kalandparkot.



Megoldás

a)	Az állítás	Az állítás megfordítása
1.	Ha nyár van , akkor nincs tanítás .	Ha nincs tanítás , akkor nyár van .
2.	Ha egy gyerek 13 éves , akkor iskolába jár .	Ha egy gyerek iskolába jár , akkor 13 éves .
b)	Az állítás	Az állítás tagadása
1.	Ez az úszómedence mély .	Ez az úszómedence nem mély .
2.	Minden gyerek szereti a kalandparkot. Vagy, ami ezzel egyenértékű: Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a kalandparkot.	Nem minden gyerek szereti a kalandparkot. Vagy, ami ezzel egyenértékű: Van olyan gyerek, aki nem szereti a kalandparkot.

Feladatok

- Fogalmazd meg az állítások megfordítását!
 - Ha esik az eső, akkor megázom.
 - Ha éhes vagyok, akkor eszem.
 - Ha megtanultam a leckét, akkor jól felelek.
 - Ha beteg vagyok, akkor lázam van.
 - Ha korán keltem, akkor álmos vagyok.
- Fogalmazd meg az állítások tagadását!
 - A zenehallgatástól jó kedvem lesz.
 - A testnevelés órán mindenki elfárad.
 - Minden ember szereti a 3D-s filmeket.
 - Van olyan lány, aki okos is és szép is.
 - Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a szünidőt.
- Jellemezd az állítások tartalmát a három lehetőség valamelyikével!

A) Mindig igaz. B) Mindig hamis. C) Lehet, hogy igaz, lehet, hogy hamis.

 - A paralelogrammának van szimmetriatengelye.
 - A trapéznek két szimmetriatengelye van.
 - A deltoidnak pontosan három derékszöge van.
 - A rombusznak van három hegyesszöge.
 - Két tengelyesen tükrös háromszögből összeállított négyszög is tengelyesen tükrös.
 - A szabályos háromszögnek van két tükrötengelye.
- Döntsd el, hogy igazak-e vagy hamisak az állítások! Válaszaidat indokold!
 - Négy egymást követő természetes szám összege osztható 4-gyel.
 - Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal, akkor osztható 18-cal.
 - Ha egy szám osztható 3-mal vagy 6-tal, akkor osztható 18-cal.
 - Ha két egyenes egy síkban van és nincs közös pontjuk, akkor a két egyenes párhuzamos.



5. Ha két egyenes egy síkban van vagy nincs közös pontjuk, akkor a két egyenes párhuzamos.
6. Minden derékszögű háromszög tengelyesen szimmetrikus.
7. Van olyan háromszög, amelyben az oldalak hossza 2 cm, 4 cm, 6 cm.
8. Ha egy téglalap területének mérőszáma négyzetszám, akkor a téglalap négyzet.
9. Van olyan deltoid, amelynek pontosan két tükörtengelye van.
10. Három síkbeli egyenes legfeljebb 7 részre osztja a síkot.

Vegyes feladatok



5. Egy csibekeltető üzemben 60 napocsibét négyzetes rekeszekbe helyeznek el az ábrán látható módon.

Így a négyzet mindegyik oldala mentén szemmel tartható a 21 kis állat. Pár nap múlva 4 db, már életképes kiscsibét áthelyeznek más helyre, és az itt maradtakat úgy rendezik el, hogy ismét minden oldalon 21 db csibe legyen. Hányszor tudják ezt az elvételt és az átrendezést megismételni úgy, hogy a négyzetes rekesz egy-egy oldalán mindig 21 db csibe legyen?

6	9	6
9		9
6	9	6

6. Három szabályos dobókockát egymásra rakunk úgy, hogy mindegyiknek a három pöttyöt ábrázoló lapja van alul, és egy-egy lapukkal teljesen illeszkednek.

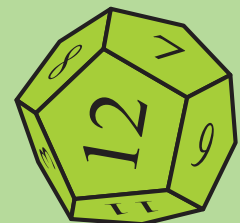
Mennyi lesz a kapott négyzetes oszlop négy oldallapján a pöttyök összege?

Mennyi ez az összeg, ha a kockának más lapját helyezzük alulra?

7. Egy szabályos dodekaéder minden lapját 1-től 12-ig terjedő számokkal megjelöljük. (A szabályos dodekaédert 12 db szabályos ötszög határolja.) Ha ezzel a „dobótesttel” egyszer dobunk, mekkora a valószínűsége annak, hogy

- a) 3-mal osztható számot dobunk,
- b) prímszámot dobunk,
- c) olyan számot dobunk, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 3?

A kapott valószínűség-értékeket fejezd ki százalék alakban is!



8. Cicoma Cili reggelente egy színes lapú dobókocka feldobásával dönti el, hogy milyen színű blúzban megy aznap iskolába.

Mekkora a különböző színű blúzok választásának valószínűsége, ha a 6 lapú kocka 1 lapja piros, 2 lapja lila és 3 lapja zöld?

Változik-e a lila blúz felvételének esélye, ha a kockán van két szomszédos lila lap vagy két szemközti lila lap?



Számok és műveletek

Milyen számokat ismerünk?



A legrégebben ismert számok a pozitív egész számok.

A számokról szóló legrégebbi emlékeink szerint Mezopotámiában a nomád pásztorok agyagkorsóba dobált kavicsokkal tartották számon a juhokat. Az agyagkorsót pecséttel lezárták, és csak számadáskor törték fel. Ha minden kavicsnak pontosan egy juh párja volt, akkor a legeltetés során nem vészett el egy sem.

A pozitív egész számok jelenthetnek **darabszámot** és **sorszámot** is.

A 0-t is a természetes számok közé soroljuk, bár a 0 fogalma sokkal később alakult ki. A **természetes számok halmazát** tehát a pozitív egész számok és a 0 nulla alkotják.

A természetes számok körében kialakultak az alpműveletek: az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás. Az összeadást és a szorzást mindig el lehet végezni a természetes számok között, a kivonást és az osztást azonban nem. Úgy is mondjuk, hogy a kivonás és az osztás kivezet a természetes számok köréből.

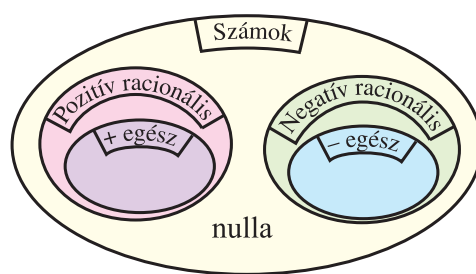
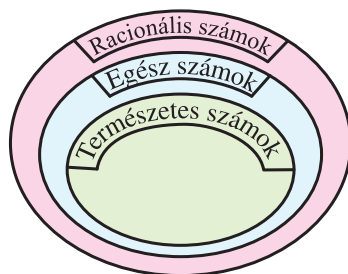
A pozitív természetes számok halmaza először a törtekkel bővült. Ezt az tette szükségessé, hogy a számokat nemcsak darabszámok, hanem másfajta mennyiségek (például: hosszúság, idő, térfogat) mérésére is elkezdtek használni. A pozitív egész és törtszámok világában már az osztás is mindig elvégezhető.

Történetileg sokkal később alakult ki a negatív számok fogalma.

Európában csak a 12. században kezdték el használni a negatív számokat, elsősorban arra, hogy a vagyoni helyzetet lejegyezzék. Később a negatív számok használata segített újfajta mennyiségek bevezetésében is: meg lehetett alkotni a negatív hőmérséklet, a negatív idő fogalmát.

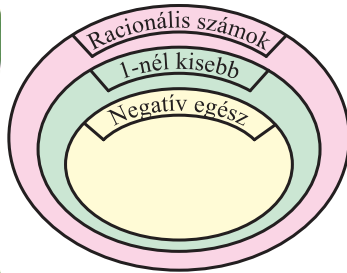
A törtekkel és a negatív számokkal kibővített számkörben már mind a négy alpművelet elvégezhető bármely két számmal, természetesen a 0-val való osztás kivételével.

Ennek a kibővített számkörnek a matematikusok nevet is adtak, az egészeket és a törtszámokat együttesen **racionális számoknak** nevezték el.



Feladatok

1.



Helyezd el a számokat a halmazábrában!

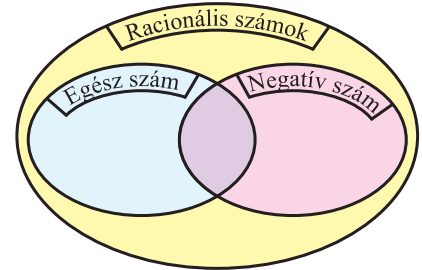
$\frac{7}{8}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{9}{3}$; -5 ; $-\frac{8}{4}$; $\frac{13}{12}$; 1 ; $0,3$; -1 ; $1,1$; 0

2.

a) Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy darab:

3 9 11 -2 -7

Készíts belőlük törtet, és helyezd el azokat a halmazábrán a füzetedben!



- b) A halmazábra részeit kiszíneztük. Fogalmazd meg, milyen tulajdonságú számok tartoznak az egyes részekbe!
- c) Van-e olyan tartománya az ábrának, ahova a készített törtek közül egy sem kerülhet?

3.

Állításokat írtunk, és megadtuk a megfordításukat is. Döntsd el, melyik igaz, melyik nem!

a) Két természetes szám összege is természetes szám.

Ha két szám összege természetes szám, akkor mindkét szám természetes szám.

b) Két egész szám szorzata egész szám.

Ha két szám szorzata egész szám, akkor mindkét tényező egész szám.

c) Két 0-tól különböző egész szám hányadosa egész szám.

Ha két szám hányadosa egész szám, akkor az osztandó is és az osztó is egész szám.

4.

Melyik állítás igaz, melyik nem? Fordítsd meg az állításokat, és a megfordításokról is döntsd el, hogy igazak-e vagy nem!

a) Ha egy szám negatív egész szám, akkor az abszolút értéke természetes szám.

b) Ha egy szám pozitív egész szám, akkor a reciproka törtszám.

c) Ha egy szám fele egész szám, akkor maga a szám is egész szám.

d) Ha egy szám kétszerese egész szám, akkor maga a szám is egész.

5.

Milyen szám állhat az x számkártya másik oldalán, ha tudjuk, hogy

a) $x < 0$, b) $-x > 0$, c) $x > 0$, d) $-x < 0$,

e) $|x| > 0$, f) $-|x| < 0$, g) $|x| \leq 0$

6.

Állításokat írtunk, megadtuk a megfordításukat is. Döntsd el, melyik igaz, melyik nem!

(1) Ha $a > b$, akkor $|a| > |b|$. A megfordítása: Ha $|a| > |b|$, akkor $a > b$.

(2) Ha $a < b$, akkor $|a| < |b|$. A megfordítása: Ha $|a| < |b|$, akkor $a < b$.

(3) Ha $a = b$, akkor $|a| = |b|$. A megfordítása: Ha $|a| = |b|$, akkor $a = b$.

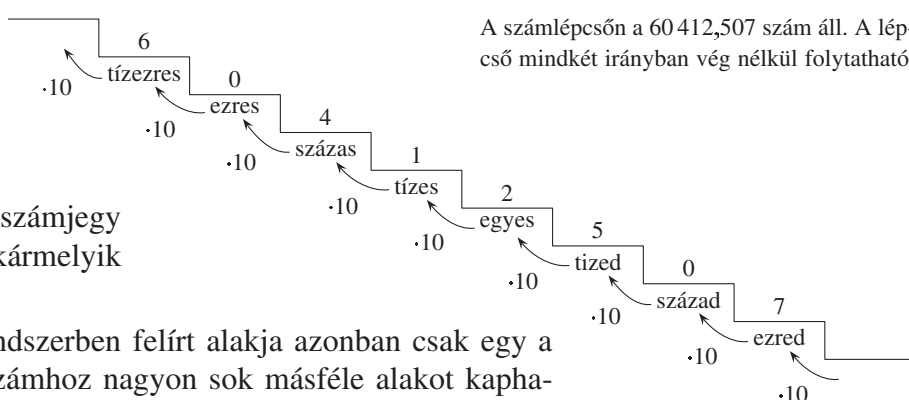
A számok különféle alakjai

A tízes számrendszer

A számok leírására sokféle módszer alakult ki, mostanra ezek közül az egész világon a tízes, helyi értékes számírás terjedt el.

A tízes számrendszerben tíz számjegy segítségével fel lehet írni akármelyik egész számot.

A számoknak a tízes számrendszerben felírt alakja azonban csak egy a lehetőségek közül. Minden számhoz nagyon sok másféle alakot kaphatunk, ha a számjegyek mellett műveleti jeleket is használunk a felírásban.



A számlépcsőn a 60 412,507 szám áll. A lépcső mindkét irányban vég nélkül folytatható.

A törtek

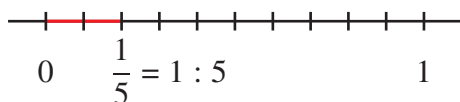
A hányados alak

Ha két egész számot összeszorozunk, akkor a szorzat is egész szám lesz, míg ha elosztjuk őket egymással (az osztó nem 0), akkor a hányados nem feltétlenül egész szám.

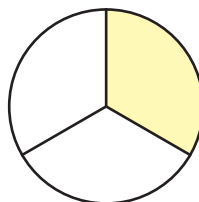
Az 1 egészet egyenlő részekre osztva kapjuk az egységtörteket. A rajzok néhány egységtörtet szemléltetnek.



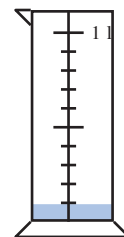
$$\frac{1}{6} = 1 : 6$$



$$\frac{1}{5} = 1 : 5$$



$$\frac{1}{3} = 1 : 3$$



$$1 \text{ liter} : 10 = \frac{1}{10} \text{ liter}$$

Ha egész számot osztunk egész számmal, akkor a hányados mindig előállítható egyenlő egységtörtek összegeként, azaz egy egységtört és egy egész szám szorzataként.

Például, ha 7 csokit 3-felé osztunk, akkor mindenki 7-nek a harmadát kapja, ami nem más, mint 7 darab egyharmad.

$$7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 7$$

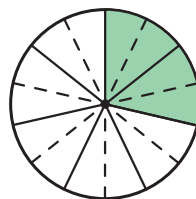


$$7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \cdot 7$$

A törteknek nagyon sokféle alakját használjuk, hogy mikor melyiket, az az adott problémától függ.

Végtelen sokféle alakot kaphatunk **egyszerűsítéssel, bővítéssel**.

Az egyszerűsítés és a bővítés segít nekünk például a műveletek elvégzésében vagy a törtek összehasonlításában. Törteket akkor könnyű összehasonlítani, ha egyenlő a nevezőjük vagy ha egyenlő a számlálójuk. Ezt pedig bővítéssel könnyen elérhetjük.



$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \dots$$

A vegyes tört alak

A vegyes tört alak megmutatja, hogy egy egynél nagyobb törtszám melyik két egész szám közé esik.

Például a $\frac{79}{30}$ tört nagyságáról többet árul el $2 + \frac{19}{30}$ összegalak, amelyet röviden a $2\frac{19}{30}$ vegyes tört alakban szoktunk írni.

A tizedes tört alak

A tizedes tört alakban a racionális számokat olyan összegként állítjuk elő, amelyben a törtek nevezője 10, 100, 1000, 10 000 stb.

$$\text{Például } 32,546 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} = 32 + \frac{546}{1000}$$

Az egy századrésznek külön nevet is adtak, százaléknek nevezzük és így jelöljük: $\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$

A százalék alak

Az egy százalék segítségével minden számot fel tudunk írni **százalék alakban**. A százalékalakot könnyen ki lehet olvasni a tizedes tört alakból.

$$\text{Például: } \frac{18}{100} = 18\% \quad 3,16 = 316 \cdot 0,01 = 316\% \quad 0,012 = 1,2 \cdot 0,01 = 1,2\%$$

Tört alakból tizedes tört alak

Példa

Írjuk át tizedes tört alakba a törteket!

$$\frac{39}{50} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{13}{10} \quad \frac{7}{125} \quad \frac{1385}{100} \quad \frac{111}{60} \quad \frac{1}{9}$$

Megoldás

- I. Ha a nevező 10, 100, 1000, 10 000 stb., akkor könnyű a tizedes tört alakba való átírás, hiszen csak a számlálóban kell kijelölni annyi tizedesjegyet, ahány nulla van a nevezőben. A számláló adja meg a tizedes tört értékes jegyeit, a nevezőben lévő 10-hatvány kitevője pedig a tizedesjegyek számát mutatja meg.

$$\text{Például: } \frac{13}{10} = 1 + \frac{3}{10} = 1,3$$

vagy

$$\frac{13}{10} = 13 : 10 = 1,3$$

$$\frac{1385}{100} = 13 + \frac{80}{100} + \frac{5}{100} = 13 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} = 13,85$$

vagy

$$1385 : 100 = 13,85$$

II. Ha a nevező osztója 10-nek, 100-nal, 1000-nek stb., akkor bővítéssel elérhetjük, hogy a nevező 10, 100, 1000 stb. legyen.

$$\frac{39}{50} = \frac{39 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{78}{100} = 0,78$$

$$\frac{7}{125} = \frac{7 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{56}{1000} = 0,056$$

Az is lehet, hogy a nevező nem osztója 10-nek, 100-nak, de a tört egyszerűsítése után azzá válik.

Ilyen a $\frac{111}{60}$ tört is; $\frac{111}{60} = \frac{3 \cdot 37}{3 \cdot 20} = \frac{37}{20} = \frac{37 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{185}{100} = 1,85$.

III. A többi esetben csak osztással boldogulunk. Ilyenkor az osztás végtelen szakaszos tizedes törtre vezet.

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1,666 \dots = 1,\dot{6}$$

$$\frac{1}{9} = 0,1111 \dots = 0,\dot{1}$$

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0,42857142 \dots = 0,4\dot{2}857\dot{1}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ \hline 30 \\ \dots\dots\dots 20 \end{array}$$

Innen kezdve ismétlődnek a maradékok és a hányadosban szereplő számjegyek is.

Tizedes tört alakból tört alak

Írjuk át tört alakba a tizedes törtet!

$$2,3 \qquad 0,048 \qquad 6328,125 \qquad 0,9091 \qquad 0,333 \dots$$

Véges tizedes törtet egyszerű átírni tört alakba, mivel a tört nevezője 10, 100, 1000 stb. aszerint, hogy hány tizedesjegy volt a tizedes törtben.

Például: $2,3 = \frac{23}{10}$

$$4,25 = \frac{425}{100}$$

$$0,048 = \frac{48}{1000}$$

$$0,9091 = \frac{9091}{10\,000}$$

A végtelen szakaszos tizedes törtek is mindig felírhatók tört alakba, de ez nem olyan egyszerű, mint a véges tizedes törtek átírása.

Ilyenkor azonban mindig kerekíthetjük őket véges tizedes törtté.

$$0,33333 \dots \approx 0,333 = \frac{333}{1000}$$

A végtelen nem szakaszos tizedes törteket azonban sohasem kaphatjuk meg két egész szám hányadosaként.

Ezek nem racionális számok.

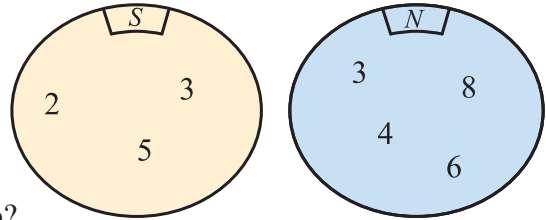
Végtelen nem szakaszos tizedes törteket nem nehéz gyártani. Például képzelj el a végtelenségig folytatva a következő számot: 0,1010010001..., amelyet úgy kapunk, hogy mindig eggyel több nulla áll két egyes között! Ebben a számban nem lesz ismétlődő szakasz.

Végtelen nem szakaszos tizedes törtet kapunk akkor is, ha a tizedesvessző után folytatólagosan leírjuk a természetes számokat: 0,12345678910111213....

Feladatok

1. Készítsd el az összes olyan törtet, amelynek számlálóját az S , nevezőjét az N halmazból veszed!

- Összesen hány tört készíthető?
- A törtek közül hány lesz 1-nél nagyobb, illetve 1-nél kisebb?
- Melyik az 1-nél kisebb törtszámok közül a legnagyobb?
- Melyik az 1-nél nagyobb törtek közül a legkisebb?



2. Mi lehet x értéke, ha tudjuk, hogy

- $\frac{x}{3} < 1$,
- $\frac{x}{5} < 0$,
- $\frac{x}{7} > 2$,
- $\frac{x}{8} = 4$,
- $\frac{x}{-3} > 0$,
- $\frac{|x|}{5} \leq 0$?

3. Írj a $\frac{12}{7}$ -del egyenlő törtet, amelynek

- a nevezője 84,
- a számlálója nagyobb 100-nál, és a nevezője kisebb 70-nél,
- számlálójának és nevezőjének a különbsége 30,
- számlálója osztható 5-tel, és a nevezője osztható 9-cel,
- a számlálója 50-nél kisebb, a nevezője pedig 35-nek többszöröse!

4. Írd fel a megadott számokat tört alakban és százalék alakban is!

38,6 0,25 0,142 0,125 500,3 125,125 6004,75

5. Írd át a törteket tizedes tört alakba!

$\frac{3}{125}$ $\frac{5}{64}$ $\frac{12}{75}$ $\frac{33}{15}$ $\frac{35}{28}$ $\frac{6}{375}$

6. Rendezd növekvő sorrendbe a számokat!

a) $-\frac{3}{5}$ 0,76 $\frac{17}{24}$ $\frac{3}{4}$ -0,12 0,33 $\frac{1}{3}$
 b) $\frac{2,5}{1000}$ $\frac{2,25}{100}$ 0,225 $\frac{0,25}{100}$ 2500,025 $\frac{25}{100}$ $\frac{25\,000}{100\,000}$
 c) -1,3 1,03 $\frac{1,3}{10}$ -0,13 $\frac{1}{3}$ $-|0,13|$ $\frac{113}{100}$ $|-0,13|$

7. Villámkérdések – Meg tudod válaszolni fejben?

- Melyik az a szám, amelyik 28-cal nagyobb a $\frac{3}{5}$ részénél?
- Melyik szám felének az ötöde 7?
- Mennyivel nagyobb a 15 ötharmad része a 15 háromötöd részénél?
- Hány alma 6 alma meg 6 fél alma meg 6 harmad alma meg 6 negyed alma?
- Negyed óra ötödének a tizede hányad része 1 órának?



8. Mi lehet x értéke?

a) $\frac{|x|}{x} > 0$

b) $x \cdot |x| < 0$

c) $3 \cdot |x| = 0$

d) $\frac{|x|}{3} = 0$

e) $\frac{3}{|x|} = 0$

9. Egy tört értéke $\frac{2}{5}$.

a) Nevezőjének és számlálójának különbsége 18. Melyik ez a tört?

b) Melyik ez a tört, ha a nevezőjének és a számlálójának különbsége 300?

Műveletek a racionális számok körében I.

Összeadás és kivonás

Törteteket összeadni vagy kivonni könnyű akkor, ha egyenlő a nevezőjük. Ezt bővítéssel mindig elérhetjük.

$$-\frac{7}{15} + \frac{13}{6} = -\frac{14}{30} + \frac{65}{30} = \frac{51}{30}$$

Az összeadást és a kivonást a tizedes törtök körében pontosan úgy végezzük, mint az egészeknél, csak arra kell ügyelnünk, hogy egyenlő helyi értékeket adjunk össze. Ezért írásbeli összeadáskor és kivonáskor nem az utolsó jegyeket illesztjük össze, hanem a tizedesvesszőket.

$$\begin{array}{r} 123,0043 \\ + 0,12 \\ \hline 123,1243 \end{array}$$

Ha egy műveletsorban keverve vannak a tört és tizedes tört alakú számok, akkor először átírjuk őket egyféle alakba, és azután elvégezzük a műveleteket.

$$0,3 - \frac{17}{5} + 1,29 + \frac{3}{4} = 0,3 - \frac{34}{10} + 1,29 + \frac{75}{100} = 0,3 - 3,4 + 1,29 + 0,75 = -1,06$$

$$0,3 - \frac{17}{5} + 1,29 + \frac{3}{4} = \frac{3}{10} - \frac{17}{5} + \frac{129}{100} + \frac{3}{4} = \frac{30}{100} - \frac{340}{100} + \frac{129}{100} + \frac{75}{100} = -\frac{106}{100}$$

A fenti példában egyszerűbb volt tizedes tört alakban számolni.

Van, amikor pontosabb tört alakban számolni.

Például: $0,3 + \frac{5}{7} = \frac{3}{10} + \frac{5}{7} = \frac{21}{70} + \frac{50}{70} = \frac{71}{70}$.

Több tag összeadása, kivonása

Ha egy műveletsorban csupa összeadás és kivonás van, és **nincsenek benne zárójelek**, akkor a műveletvégzés sorrendjét felcserélhetjük, mindössze arra kell vigyáznunk, hogy a számok mindegyikét az előtte álló műveleti jellel együtt mozgassuk.

1. példa

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} - 2,85 + 17 + \frac{13}{7} - \frac{18}{5} + 112,85 = ?$$

Megoldás

Ha korongokra írjuk a számokat az előttük álló műveleti jelekkel együtt, akkor tetszőlegesen elmozgathatjuk a tagokat. Egy megfelelő sorrendben sokkal könnyebb kiszámítani az összeget.

$$\begin{aligned}
 & 0 \quad \left(+\frac{1}{7}\right) \quad \left(+\frac{3}{5}\right) \quad (-2,85) \quad (+17) \quad \left(+\frac{13}{7}\right) \quad \left(-\frac{18}{5}\right) \quad (+112,85) = \\
 & = 0 \quad \left(+\frac{1}{7}\right) \quad \left(+\frac{13}{7}\right) \quad \left(+\frac{3}{5}\right) \quad \left(-\frac{18}{5}\right) \quad (+112,85) \quad (-2,85) \quad (+17) = \\
 & = \frac{14}{7} - \frac{15}{5} + 127 = 2 - 3 + 127 = 126
 \end{aligned}$$

2. példa

Helyezzünk el egy zárójelpárt az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon. Válasszuk ki azokat az eseteket, amelyekben az eredmény nem változik, és azokat, amelyekben megváltozik a végeredmény!

$$8 - 15 + 72 - 5 + 100$$

Megoldás

Nem változik az eredmény

$$(8 - 15) + 72 - 5 + 100 = 160$$

$$(8 - 15 + 72) - 5 + 100 = 160$$

$$(8 - 15 + 72 - 5) + 100 = 160$$

$$(8 - 15 + 72 - 5 + 100) = 160$$

$$8 - 15 + (72 - 5) + 100 = 160$$

$$8 - 15 + (72 - 5 + 100) = 160$$

Megváltozik az eredmény

$$8 - (15 + 72) - 5 + 100 = 16$$

$$8 - (15 + 72 - 5) + 100 = 26$$

$$8 - (15 + 72 - 5 + 100) = -174$$

$$8 - 15 + 72 - (5 + 100) = -40$$

Ha csak összeadások és kivonások állnak a műveletsorban, akkor

a műveletsor elején vagy egy + jel mögött mindig nyithatunk zárójelet és tetszőleges helyen bezárhatjuk azt. Nem változik az eredmény akkor sem, ha egy + jel után álló zárójelet a párjával együtt elhagyunk.

a – jel után betett vagy elhagyott zárójel az eredményt megváltoztatja.

Csak összeadásokat és kivonásokat tartalmazó műveletsorok esetén, ha a zárójel előtt + jel áll, akkor a zárójel elhagyható. Ha a zárójel előtt – jel áll, akkor a zárójel elhagyása után a zárójelben levő művelet megváltozik, hozzáadásból kivonás lesz, kivonásból pedig hozzáadás.

Feladatok

1. Végezd el a műveleteket!

$$\begin{array}{llll} a) 3,3 - (-5,4) & b) 46,8 - (-103,5) & c) 5,7 - \left(-\frac{1}{2}\right) & d) \frac{4}{3} - 1\frac{5}{7} \\ e) 523 - 4238 & f) -505 + (-3,04) & g) 5,2 + \left(-\frac{3}{4}\right) & h) 4,6 + (-31,7) \\ i) -\frac{8}{3} + \frac{5}{24} & j) -10,08 + (-3,001) & k) 56 - (-44) & l) 3,2 + \frac{41}{20} \end{array}$$

2. Melyik különbség pozitív?

$$\begin{array}{lll} a) 12 - 7,5 & b) \frac{3}{4} - 0,75 & c) 8,3 - 12 \\ d) \frac{3}{3} - \frac{10}{4} & e) 1,3 - \frac{25}{20} & f) 0 - 1 \end{array}$$

3. Két-két összeg, illetve különbség közé tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet!

$$\begin{array}{lll} a) (-6) + (-4,9) & (-4) + (-6,9) & b) 53 - 17,53 \\ c) \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) & d) -41 - 2,05 \end{array}$$

4. Végezd el a kivonásokat, majd a két-két különbséget hasonlítsd össze! Hogyan változik meg a különbség, ha a kisebbítendőt és a kivonandót felcseréljük?

$$\begin{array}{llll} 5 - 3 & 3 - 5 & 2 - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - 2 \\ \frac{4}{5} - 0,1 & 0,1 - \frac{4}{5} & 18 - 19 & 19 - 18 \end{array}$$

5. Végezd el a műveleteket minél „ésszerűbben”!

$$\begin{array}{ll} a) -5,2 - (-0,3) - 1,37 + (-0,8) + 0,07 & b) -\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{6}\right) - 0,5 + \frac{5}{6} \\ c) 0,75 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{30}{8}\right) & d) 6,4 - 0,8 + \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{2}{5} + 0,4 \\ e) -3,3 + 4,9 + 5,1 + (-6,7) & f) 4,75 - 3,8 + (-0,75) - (-0,2) \end{array}$$

6. Helyezd el a (és) zárójelkártyákat az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon! Válaszd szét a kapott műveletsorokat aszerint, hogy az eredményük 103 maradt-e, vagy nem!

$$9 - 11 + 27 - 5 + 83 = 103$$

7. Válaszd ki az egyenlőket!

$$\begin{array}{lll} a) 5 - (11 + 22) & b) 5 + 11 + 22 & c) 5 + 11 - 22 \\ d) (5 + 11) - 22 & e) 5 - 11 - 22 & f) 5 - (22 - 11) \\ g) 5 + (11 - 22) & h) 5 - (11 - 22) & i) 5 - 22 - 11 \end{array}$$

8. Vásárolni indultam a Ft-tal. 815 Ft-ért zöldséget, 530 Ft-ért szörpöt vettem, az üres üvegekért pedig kaptam 60 Ft-ot. Mennyi pénzem maradt? Melyik megoldásterv illik a szöveghez?

$$\begin{array}{lll} a - 815 - 530 + 60 & a - (815 - 530 + 60) & a - (815 + 530 - 60) \\ a - (815 - 530 - 60) & a - (815 + 530 + 60) & a - 815 - (530 + 60) \end{array}$$