Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joubert, XIX. századi filozófus)

Kedves Gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt Nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelmeit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük: TUDNI KELL!

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:

Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.

Amit korábban tanultatok, és már tudnotok kellene.

Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el.

1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapfeladat, ezt meg kell tudnotok oldani a továbbhaladáshoz.

2. Az új ismeret alkalmazását, tudásotok rögzítését, elmélyítését segítő feladat.

3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.

4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.

Internettel támogatott feladatok.

A tankönyvben található **Kiegészítő tananyagokat** a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak írtuk.

A hozzájuk kapcsolódó feladatokat is a fentebb leírt szintekbe soroltuk, de más színnel jelöltük, például: **25.**

A fentieken kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: **123.**

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold” típusú feladatoknál a füzetetekbe dolgozzatok!

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Ha szabadidőtökben is szívesen foglalkoztok matematikafeladatokkal, akkor figyelmetekbe ajánljuk az alábbi kiadványokat:

Abacus Matematikai Lapok 10–14 éveseknek (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány folyóirata)

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány)

Róka Sándor: *Egypercesek – Feladatok matematikából* (Tóth Könyvkereskedés)

Imreczené–Reiman–Urbán: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.)

Eredményes tanulást kívánunk: *a szerzők és a kiadó*

Gondolkodjunk együtt!

Logikai feladatok

Példa

Győző, Piroska, Lajos és Zoli közül valaki elrontotta kisöccsük karácsonyra kapott távirányítós autóját. Édesapjuk megpróbálta kideríteni az igazságot. A gyerekek ezeket mondták:

Győző: Lajos volt.

Piroska: Én hozzá se nyúltam az autóhoz.

Lajos: Zoli volt.

Zoli: Lajos hazudik.

Ki rontotta el az autót, ha a négy gyerek közül egy hazudott, a másik három pedig igazat mondott?

Megoldás

Győző és Lajos nem mondhattak egyszerre igazat, hiszen egymásnak ellentmond az állításuk. Ugyanez igaz Lajos és Zoli állítására is. Ezért Lajos hazudott, a többiek igazat mondtak.

Lajos rontotta el az autót.

Feladatok

1. Julinak, Marinak, Norbinak és Ferinek is van egy-egy állatkája: egy cica, egy kutya, egy aranyhal és egy kanári.

Mari állata szőrös, Ferié pedig négylábú. Norbi madarat tart. Juli és Mari nem tart cicát.

Az alábbi állítások közül melyik nem igaz?

A) Ferié a kutya. *B)* Norbié a kanári. *C)* Julié az aranyhal.

D) Ferié a cica. *E)* Marié a kutya.

2. Egy családi nyaraláson a gyerekek ugyanazzal a bankkártyával vásárolhattak. Az ötödik napon édesapjuk érdeklődött, hogy mennyi pénz van még a bankkártyán. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

Andris: Még legalább 5000 Ft.

Bea: Úgy emlékszem, hogy 5000 Ft-nál kevesebb van már rajta.

Csilla: Én csak azt tudom, hogy van még rajta pénz.

Hány forint van a bankkártyán, ha csak az egyik gyerek állítása igaz?

3. Négy testvér közül az egyik édesapjuk laptopján játszott, és véletlenül ráborította az üdítőitalát a gépre. Édesanyjuk megpróbálta kideríteni, melyik fiú tette. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

András: Nem én voltam. Béla: Én sem.

Csaba: Dani borította rá. Dani: Béla volt.

Kiderült, hogy az egyikük füllentett, a többiek igazat mondtak. Ki volt a tettes?

4. Öt gyerek a következőt állítja egymásról:

András: A fiútestvérem focizik.

Bea: Pontosan két fiútestvérem van.

Csaba: Csak lánytestvérem van.

Dóra: A fiútestvérem szereti az informatikát.

Endre: A lánytestvérem a városi kórusban énekel.

Ki lehet Csaba testvére, ha mindenki igazat mond?

5. Egy nemzetközi futóverseny előtt öt női versenyző így nyilatkozott az újságíróknak:

Anna: Az első három között leszek.

Barbara: Én nyerek.

Cecília: Legyőzöm Annát.

Daniella: Nem tudom Barbarát legyőzni.

Edit: Cecília vagy Daniella fog nyerni.

Hogyan alakult a sorrend, ha a verseny végére egyiküknek sem lett igaza?

@ Európában az egyik legnépszerűbb futóverseny a párizsi Schneider maraton. A 2015-ös évben a férfiak versenyében három kenyai és két etióp versenyző végzett az első öt helyen. Wilson Chebet (ejtsd: Vilszon Csebet) kenyai versenyző ért először célba. Tippeld meg, majd nézz utána az interneten, hogy mennyi idő alatt futotta le a 42,195 km-es maratoni távot!

A) 4:05:27 *B)* 3:05:27

C) 2:05:27 *D)* 1:05:27

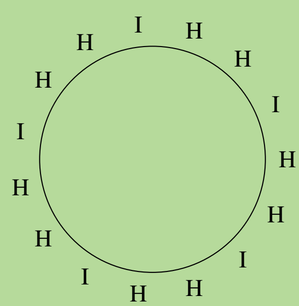
6. Feri, Gyula, Jancsi és Karcsi meglátogatták egy barátjukat. A négy fiú családi neve valamilyen sorrendben: Kiss, Nagy, Szabó és Molnár. Elsőnek Molnár érkezett, másodiknak Jancsi, ezután Kiss és végül Gyula.

Mindenki hozott egy ajándékot: Molnár bűvös kockát, Feri golyóstollat, Gyula csokit, Szabó pedig könyvet.

Mi a négy fiú teljes neve?

(Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János: Fejtörő feladatok felsősöknek, Pannon-Literatúra Kft., 2014)

7. Tizenöt fős társaság ül egy kerek asztalnál, és mindenki azt állítja, hogy mindkét szomszédja hazudós. Azt is tudjuk, hogy a hazudósok mindig hazudnak, az igazmondók mindig igazat mondanak. A társaság minden tagja tudja mindkét szomszédjáról, hogy igazmondó vagy hazudós.
Legalább hány igazmondó ül az asztal körül?



8. Seholsincs-szigeten kétféle ember él: igazmondók, akik mindig igazat mondanak, és hazudósok, akik mindig hazudnak. Egy alkalommal meglátogattam ezt a szigetet. A tengerparton álldogált két szigetlakó: Alfa és Béta. „Te igazmondó vagy?” – kérdeztem Alfát.

Alfa válaszát sajnos nem értettem az erős tengerzúgás miatt. Megkérdeztem Bétát, hogy mit válaszolt Alfa. Ő így válaszolt: Alfa azt mondta, hogy ő hazudós.

Mi lehet Alfa, illetve Béta?

Logika, halmazok

Az **és** kötőszót a hétköznapi szóhasználatban és a matematikában ugyanúgy használjuk. Nézzünk erre példákat!

Éber Bence csak akkor tud elaludni, ha teljes sötétség és síri csend van a szobájában.

15-tel csak akkor oszthatók a számok, ha 3-mal és 5-tel oszthatók.

Az ilyen összetett állítások csak akkor igazak, amikor a bennük szereplő két állítás mindegyike igaz.

A **vagy** kötőszó sokféle értelemben használatos a magyar nyelvben. Ezek közül kettőre nézzünk példát!

Kacér Vica vasárnap 9-kor vagy Deltás Bécivel megy evezni, vagy Sebes Gyuszival motorozik.

Ebben a mondatban a „vagy-vagy” kötőszó helyett a „legfeljebb az egyik”, illetve a „pontosan az egyik” kifejezés írható, mivel Vica egyszerre, ugyanabban az időben nem lehet két különböző helyen.

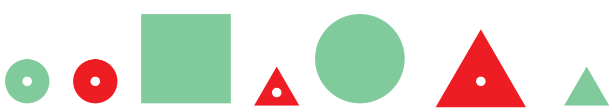
Két szám szorzata nulla, ha az egyik vagy a másik tényező nulla.

Ebben a mondatban a „vagy” kötőszó helyett a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés írható. Megállapodhatunk abban, hogy az egyszer írt, illetve mondott „vagy” kötőszót – a hétköznapi használattól eltérően – a matematikában a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés helyett használjuk.

Az ilyen összetett állítás csak akkor hamis, amikor a két állítás mindegyike hamis.

1. példa

Az állításokat ezekről a logikai lapokról írtuk.



Melyik állítás hamis?

a) A lapok lyukasak és zöldek.

b) A lapok nem kékek és nem sárgák.

c) A lapok lyukasak vagy zöldek.

d) A lapok lyukasak vagy nagyok.

Megoldás

a) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre nem teljesül egyszerre mindkét tulajdonság. *Például:* nagy zöld négyzet.

b) Igaz, mert mindkét tulajdonság igaz a lapokra.

c) Igaz, mert minden lapra legalább az egyik tulajdonság igaz.

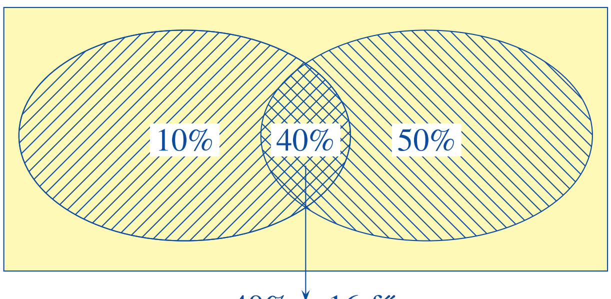
d) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre egyik tulajdonság sem igaz. *Például:* kicsi zöld háromszög.

2. példa

Egy osztály fele németül tanul, 90%-a angolul. 16 gyerek mindkét nyelvet tanulja. Hányan járnak az osztályba, ha mindenki tanul legalább egy nyelvet?

Megoldás

Az osztály felének és a 90%-ának az összege 140%. Ez 40%-kal több, mint a 100%. A 40%-nyi többlet abból adódik, hogy a mindkét nyelvet tanuló gyerekeket kétszer számoltuk. Ők 16-an vannak. Ha az osztály tanulóinak 40%-a 16 gyerek, akkor 10%-a 4 fő, 100%-a 40 fő. 40 tanuló jár az osztályba. Ellenőrizzünk! 20-an tanulnak németül, 36-an angolul: 20 + 36 – 16 = 40. Jól oldottuk meg a feladatot!



50% németül tanul

90% angolul tanul

40% németül és angolul tanul

40%	16 fő
10%	4 fő
100%	40 fő

Feladatok

1. Kanada kétnyelvű ország. Az emberek 86%-a beszél angolul, 32%-a pedig franciául.
Az emberek hány százaléka beszéli mindkét hivatalos nyelvet, ha legalább az egyiket minden lakos beszéli?
(https://hu.wikipedia.org/wiki/Kanada)

2. Egy osztályban 40 tanuló van. 14 tanuló kézilabdázik, 36 kosárlabdázik. Minden tanuló legalább az egyik sportágat űzi. Az osztály hány százalékát teszik ki azok a tanulók, akik csak kézilabdáznak?

3. Az iskolának foci- és kosárlabdacsapata van. Az egyik osztályban 7 fiú jár az iskolai focimeccsekre, 10 jár a kosárlabdameccsekre, 3 mind a két sportág meccseit látogatja, de 4 fiú egyáltalán nem jár meccsekre. Hány fiú jár az osztályba?

4. Egy nyolcadikos osztály 35 tanulója között 20 lány van, és 12 olyan gyerek, aki tud keringőzni. Az osztályba járó fiúk közül 7 tud keringőzni. Hány olyan lány van, aki tud keringőzni? Hány fiú nem tud keringőzni?

5. Egy versenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. Az indulók két feladatot kaptak.

Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat 65%-a oldotta meg. Minden induló legalább egy feladatot megoldott. Csak a másodikat 80-an oldották meg. Hányan járnak az iskolába?

(Varga Tamás Matematikaverseny, 7. osztály)

6. Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben az egyik számjegy nagyobb, mint a másik?

7. A 40-nél nagyobb, de 60-nál kisebb számok közül hány olyan van, amelyik 3-mal vagy 4-gyel osztható?

8. Hány olyan kétjegyű szám van, amely

a) osztható 3-mal és 4-gyel,

b) osztható 3-mal vagy 4-gyel,

c) nem osztható sem 3-mal, sem 4-gyel?

9. Nóra és Sári ikertestvérek, külsejük alapján nem tudják őket megkülönböztetni. Az a különös szokásuk, hogy egyikük minden hétfőn, kedden és szerdán, a másikuk pedig minden csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, s a hét többi napján igazat mond. Egyik nap egyikük ezt állította: Szombaton hazudok. Vasárnap hazudok. Másikuk ezt állította: Holnap hazudni fogok. Melyik napon állították ezt?

(Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 1992. 6. és 7. osztályosok versenye, megyei döntő.)

10. Egy verseny után Pista örömmel újságolta barátainak, hogy megoldotta a feladatokat.

Az egyik feladat így szólt: Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben van 3-as számjegy?

Pista megoldása:

A 3-as számjegy lehet bármelyik helyen.

Ha az első helyen van: 3☐☐, a másik két helyre 10–10 számjegy kerülhet, tehát ilyen számból $10 \cdot 10 = 100$ van.

Ha a második vagy a harmadik helyen van a 3-as számjegy: ☐3☐ vagy ☐☐3, akkor az első helyre 0 nem kerülhet, ezért $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$ ilyen szám van. Tehát az összes megoldás: $100 + 180 = 280$.

Sajnos Pista erre a megoldásra nem kapott pontot.

Magyarázd meg, hol hibázott, és add meg a helyes választ!

11. Egy versenyen két feladatot kellett megoldani. Hatan voltak, akik mindkét feladatot megoldották, és hatan, akik az egyiket sem tudták megcsinálni. A legalább egy feladatot megoldók 75%-a oldotta meg az elsőt, 50%-a a másodikat. Hányan vettek részt a versenyen, és hányan voltak, akik az első feladatot megoldották, de a másodikat nem?

Skatulyaelv

1. példa

Egy kotlós alatt tyúk- és kacsatojások vannak. Ha tyúktojást akarok kivenni a kotlós alól, akkor legkevesebb ötöt, ha kacsatojást, hatot kell kivennem. Hány tojáson ül a kotlós?

Megoldás

Mivel legrosszabb esetben 5 tojást kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen azok között tyúktojás, ezért kacsatojásból 4 van. Hasonló okok miatt tyúktojásokból 5 van. A kotlós tehát 9 tojáson ül.

2. példa

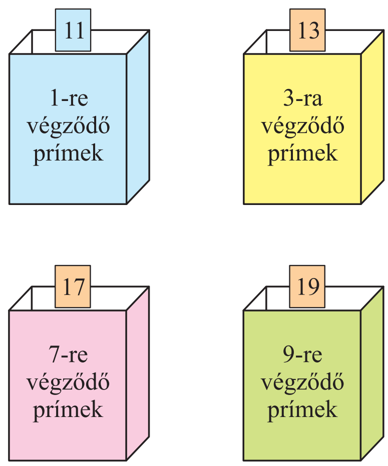
Igaz-e, hogy öt, legalább kétjegyű prímszám közül kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?

Megoldás

A 10-nél nagyobb prímek utolsó jegye csak 1, 3, 7, illetve 9 lehet. Képzeletben készítsünk négy skatulyát! Az egyikbe azokat a prímeket rakjuk, amelyek 1-re végződnek, a másodikba a 3 végűeket, a harmadikba a 7-re végződőeket és a negyedikbe a 9 végűeket.

Mivel csak négy skatulya van és öt prím, így lesz legalább egy olyan skatulya, amelyikben két prím van. E kettő különbsége 0-ra végződő szám lesz, tehát osztható 10-zel.

Az ilyen gondolkodási módszert nevezzük skatulyaelvnek.



Feladatok

1. A 24 fős osztályunkban az a szokás, hogy a hónap elején felköszöntjük az összes olyan gyereket, aki abban a hónapban született.

a) Biztosan lesz-e olyan hónap, amikor legalább 2 gyereket köszöntünk fel?

b) Lehet-e olyan hónap, hogy nincs kit felköszönteni?

2. Egy zacskóban 10 zselés és 10 mogyorós drazsé van, szemre egyformáknak látszanak. Legkevesebb hány darabot kell kivennie Áronnak, hogy biztosan legyen köztük egy mogyorós és egy zselés is?

3. Egy borosgazda pincéjében 13 palack édes, 9 palack félédes és 5 palack száraz tokaji bor van. A feleség, aki nem tud különbséget tenni a palackok között, legalább hányat vigyen fel a vendégeknek, ha azok azt szeretnék, hogy biztosan legyen köztük

a) édes, *b)* három palack édes, *c)* mindegyik fajtából legalább egy palack,

d) az összes száraz, *e)* édes és félédes, *f)* valamelyik fajtából három palack?

4. Egy fedett kosárban 10 barna, 15 szürke és 20 fehér galamb van. Egyesével engedjük ki őket. Legalább hány galambnak kell kirepülnie, hogy biztosan legyen köztük

a) barna vagy fehér, *b)* barna és fehér, *c)* legalább 12 egyforma színű?

5. Egy meglehetősen rendetlen műlovarnő az öltözőszekrényének fiókjában tartja kesztyűit igen nagy összevisszaságban: 3 pár sárgát, 3 pár kéket és 3 pár pirosat. Előadás előtt kialszik a villany az öltözőjében. Legalább hány darab kesztyűt kell találomra kivennie ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy pár ugyanolyan színű, ha a jobbos és balos kesztyű nem egyforma?

6. Egy tálon meggyes, lekváros és túrós bukta illatozik. Legkevesebb 6-ot kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük meggyes. Legkevesebb 7-et kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük lekváros, és 8-at, hogy biztosan legyen köztük túrós. Hány bukta van a tálon?

7. Felírtunk a táblára hét különböző négyzetszámot. Igaz-e, hogy van közöttük két olyan, amelyik ugyanolyan számjegyre végződik?

8. Igaz-e, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?

9. Bizonyítsuk be, hogy

a) három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel,

b) öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal,

c) hét egész szám között mindig van négy, amelyek összege osztható 4-gyel!

10. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az 1, 2, 3, …, 25 számok közül úgy, hogy semelyik kettőnek az összege ne legyen osztható 3-mal?

Hányféleképpen?

1. példa

Az idei farsangon öt tánciskolás fiú a görögök néptáncát, a szirtakit mutatta be. A táncot hol egy sort alkotva, hol körben összekapaszkodva járták. Az előadás nagy sikert aratott. Az öltözőben a táncosok kézfogással búcsúztak el egymástól.

a) Hány különböző sorrendben kerülhettek egymás mellé a fiúk, ha egy sort alkottak?

b) Hogyan változik a lehetőségek száma, ha körben táncoltak? A körtáncnál különböző esetnek számít, ha legalább egy táncos fiúnak legalább az egyik oldalán más táncos áll.

c) Hány kézfogást jelent, ha mindenki mindenkivel kezet fogott?

Megoldás

a) A táncosokat jelöljük az ábécé betűivel! Nézzük meg, mi történne, ha kevesebb táncos lenne!

Ha egy táncos van, akkor 1-féle sorrend lehetséges: 1 lehetőség.

Ha két táncos van, akkor $2 \cdot 1$-féle: A–B, B–A — 2 lehetőség.

Ha három táncos van, akkor $3 \cdot (2 \cdot 1)$-féle: 6 lehetőség.

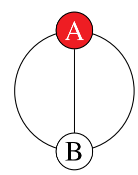
- A: B–C, C–B
- B: A–C, C–A
- C: A–B, B–A

Ha négy táncos van, akkor folytathatnánk a fadiagram felrajzolását, és 24 ágat kapnánk. Szorzással felírva $4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24$ a lehetőségek száma.

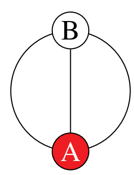
Ha öt táncos van, akkor $5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 24 = 120$-féle lehetőség adódik.

b) Ha körben táncolnak, akkor azt kell meggondolnunk, hogy melyek azok a sorrendek, amelyeket nem lehet megkülönböztetni.

Két fiú táncol:

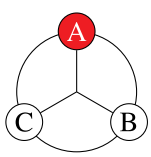


Ha a táncosok éppen egy félkörnyit fordulnak, akkor ezt kapjuk.

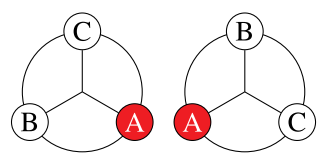


Ebben az esetben is ugyanabban a sorrendben állnak. A két eset között nem teszünk különbséget.

Három fiú táncol:

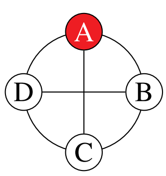


Ha a táncosok harmadfordulatokkal fordulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

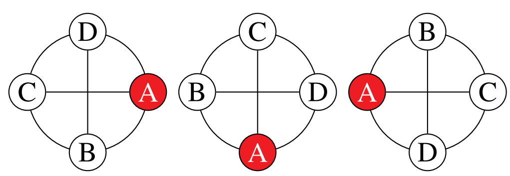


E három eset között nem teszünk különbséget.

Négy fiú táncol:

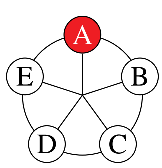


Ha a táncosok negyedfordulatokkal mozdulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

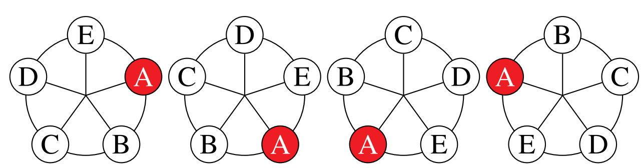


A négy állás között nem teszünk különbséget.

Öt fiú táncol:



Ha ötödfordulatokkal mozdulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.



Az öt állás között nem teszünk különbséget.

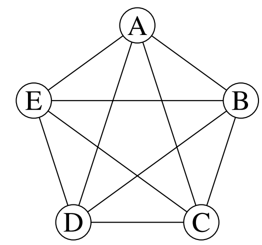
Ha az öt fiú körben táncol, akkor az egy sorban táncolásnál kapott 120 lehetőségből 5-5 egymástól nem megkülönböztethető. Ezért $120 : 5 = 24$-féleképpen táncolhatnak.

Rövidebb megoldás

Kiválasztunk egy táncost, és megnézzük, hogy a többiek hány különböző módon állhatnak be a körbe. Öt táncos esetén ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

c) Mind az öt fiú 4 társával fog kezet, ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ eset. Mivel minden kézfogásnak két résztvevője van, és a kézfogást mindkettőjüknél beleszámítottuk, ezért a 20-at még el kell osztani 2-vel.

A rajzon minden összekötés egy kézfogást jelent. Arról is leolvasható, hogy összesen 10-szer fogtak kezet a fiúk.



Arra a szorzatra, amelyben 1-től n-ig összeszorozzuk a természetes számokat, külön jelölést vezettek be a matematikusok: $n!$ (olvasd: n faktoriális).

Például: $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ stb.

Megállapodás szerint: $0! = 1$, és $1! = 1$.

A nagyobb számok faktoriálisát a zsebszámológép $\boxed{!}$ gombjával is meghatározhatod.

Az ábrákról leolvasható, hogy az esetek száma így alakul:

Táncosok száma	A különböző sorrendek száma, ha egymás mellett állnak	A különböző sorrendek száma, ha kört alkotva állnak
2	$2 \cdot 1 = 2 = 2!$	$\frac{2 \cdot 1}{2} = 1 = 1!$
3	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2 = 2!$
4	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6 = 3!$
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = 5!$	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 24 = 4!$
$\vdots$		
n	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$	$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n-1)!$

2. példa

Öt újonc közül hármat tud magával vinni az edző a tanulócsónakkal.

Hány különböző lehetőség van erre, ha

a) az ülésrend számít,

b) az ülésrend nem számít?

Az oktató minden esetben az első helyen ül.

Megoldás

a) Az első helyre még mind az öt gyereket választhatja az edző. A második helyre már csak a megmaradó négy gyerekből válogathat, a harmadikra pedig már csak három közül. Ez összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eset.

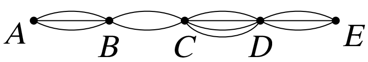
b) Ha az ülésrend nem számít, akkor nem teszünk különbséget az alábbi hat eset között. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. (A csónakba beszálló gyerekeket az ábécé betűivel jelöljük.)

Ugyanez a helyzet, akármelyik három gyereket választja ki az edző. A 60-at el kell osztani 6-tal, mert ugyanaz a három gyerek 6-féle sorrendben tud beülni az oktató mögé. Ha az ülésrend nem számít, akkor $\frac{60}{6} = 10$ különböző módon ülhetnek be a gyerekek a csónakba.

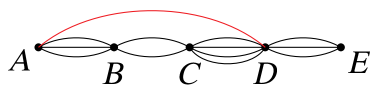
3. példa

Hány különböző útvonalon juthatunk el A városból E városba, ha csak E felé haladhatunk?

a)



b)



Megoldás

a) A városból B városba 3-féle úton juthatunk el. Innen C-be 2 különböző úton érkezhetünk. Ezért A-ból C-be $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen juthatunk el. Hasonló okoskodással határozhatjuk meg, hogy D városba $6 \cdot 4 = 24$-féle útvonalon juthatunk, amely $3 \cdot 2 \cdot 4$. D-ből E-be 3 út vezet, ezért A-ból E-be $24 \cdot 3 = 72$-féle útvonalon juthatunk el, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$.

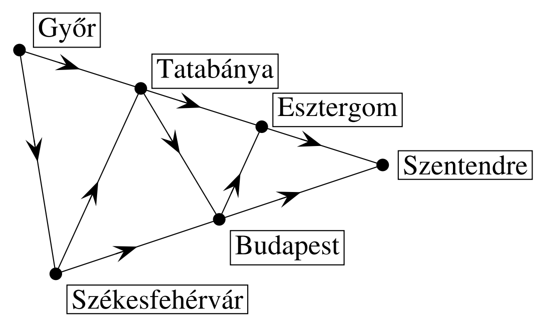
b) A *b)* feladatban az összes olyan útvonalon eljuthatunk A-ból E-be, mint az *a)* feladatban. Ezektől az utaktól teljesen független útvonalakon haladunk, ha a piros úton indulunk el. A-ból D-be 1 út vezet, innen E-be pedig 3, ezért A-ból E-be 3-féle útvonalon juthatunk.

Az összes útvonalak száma így $72 + 3 = 75$, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3$.

4. példa

Sportkörünk kerékpártúrája Győrből indult, és Szentendrén fejeződött be. Minden csapatunk más-más útvonalon jutott el a célállomásra. A térképen látható nyilak mutatják, hogy milyen irányban haladtak a csapatok.

Hány csapat vett részt a kerékpártúrán?

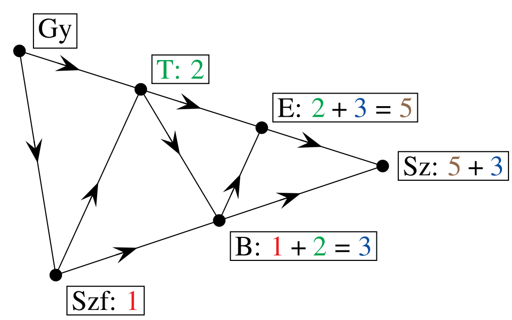


Megoldás

Minden pontba beírtuk, hogy oda hányféle útvonalon juthatunk el.

Tatabányára Győrből és Székesfehérvárról is eljuthatunk.

Budapestre Székesfehérvárról egyféle útvonalon, Tatabányáról az előző 2-féle útvonalon juthatunk el, ezért összesen $2 + 1 = 3$-féleképpen.



Gondolkodjunk együtt!

Esztergomba Tatabányáról 2-féle útvonalon, Budapestről 3-féle útvonalon érkezhetünk, ezért összesen 2 + 3 = 5-féleképpen.

Szentendrére Budapestről 3-féle, Esztergomból 5-féle útvonalon érkezhetünk, ezért összesen 3 + 5 = 8-féle útvonalon érkezhetünk.

Az idei kerékpártúrán 8 csapat vett részt.

Feladatok

1. A mi iskolánkban belső használatra ilyen telefonkészülékeket gyártottak. Hány különböző legfeljebb négyjegyű telefonszám hívható, ha

a) a számjegyek nem ismétlődhetnek,

b) a számjegyek ismétlődhetnek?

2. *a)* Hányféle gyöngysor fűzhető ezekből a gyöngyökből?

b)

Hányféle lesz a gyöngysorok száma, ha körbefuthatnak a szálon a gyöngyszemek?

3. Magyarországon a gépjárműveken jelenleg 6 karakter hosszúságú forgalmi rendszámok vannak használatban. Ezek sorozatrendszám esetén három betű, három szám felosztásban követik egymást, fehér alapon fekete karakterekkel.

Magyar EU-s rendszám 2004. május 1-jétől

Milyen autórendszámból lehet több Magyarországon?

Az olyanból, amelynek mind a három számjegye különböző, vagy az olyanból, amelynek számjegyei között vannak egyenlők is?

@ Egyes rendszámsorozatokat cégek, intézmények megvásároltak, hogy járműveiket ezzel is megkülönböztessék. Például a BPO-123 és a BPI-123 a BKV Zrt. autóbuszainak rendszáma. (A cég szokása szerint I = 1; O = 0. Tehát például a BPI-809-es forgalmi rendszámú busznak az azonosítója 18-09, és például a BPO-001-nek 00-01.) Milyen a Magyar Televízió Zrt. rendszáma?

4. Gyermekkorunkban azt játszottuk, hogy a „Szép az icipici női cipő, női cipő. Benne takarosan lépked a nő, a nő...” együgyű szövegű dalocskát énekeltük ugyanolyan magánhangzókkal. Például csupa ú-val: „Szúp uz ucupucu núu cupú...”

A C□P□ „szó” hiányzó magánhangzói helyére a magyar abc magánhangzóit beírva hány különböző „szót” kapunk? Ezek közül hány lesz értelmes?

5. Ismert magyar költők híres sorait adtuk meg magánhangzók, illetve mássalhangzók nélkül. Melyik esetben könnyebb kitalálni a verssorokat? (A kettős mássalhangzókat is egy □-tel jelöljük.)

a) T□LPR□ M□GY□R, H□ □ H□Z□

b) T□Z□S□N S□T L□ □ NY□R□ N□P S□G□R□

c) □Ú□ A□ É□I □O□Á□, □E□I□E□ A □A□□A□

d) □É□ □Í□□A□ A □Ö□□□E□ A □E□□I □I□Á□O□

6. A nyári hegymászótáborban húsz fiú vett részt. A tábor végén mindenki címet cserélt a többiekkel. Az állomáson mindenki kézfogással búcsúzott el a többiektől. Összesen hány címet írtak le a fiúk? Összesen hányszor fogtak kezet?

7. Az iskolánk kosárlabdacsapatának lányai a meccsek végén pacsit adnak egymásnak. Hány játékos vett részt a mi iskolánkból azon a mérkőzésen, ahol 105 pacsi csattant?

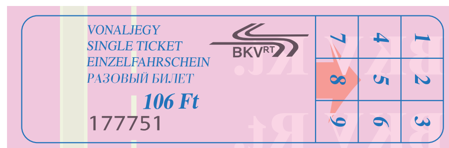
8. Egy szabályos hatszög egyik csúcsát pirosra, a többit kék színűre színeztük. A hatszög csúcsaiból hármat kiválasztva háromszögeket kaptunk. Melyik fajta háromszögből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?

9. Az ötödikesek olyan lottóval játszottak, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számokból két számra kell tippelni.

a) Hány szelvényt kell ahhoz kitölteniük, hogy biztosan legyen telitalálatuk (azaz 2 találatuk) ezen a lottón?

b) Hány szelvény kitöltése esetén lesz biztosan 1 találatuk?

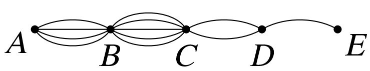
10. Régen az autóbuszjegyeket úgy érvényesítették az utasok, hogy egy készülékbe belehelyezték, és az néhány számot kilyukasztott a jegyen.

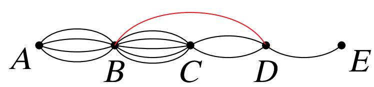


a) Egy ilyen autóbuszjegyen hányféleképpen lehet 2 lyukat lyukasztani?

b) Egy ilyen autóbuszjegyen 2 vagy 7 lyuk lyukasztásával lehet többféle lyukasztást elérni?

11. Hány különböző útvonalon juthatunk el *A* városból *E* városba, ha csak kelet felé haladhatunk?

a)


b)


12. Hányféleképpen olvasható le az ábráról az ODA, BUDA, illetve a BUDAPEST szó? Csak az összekötő vonalak mentén, jobbra vagy lefelé szabad haladni.

a)
```
O–D–A
|  |
D–A
|
A
```

b)
```
B–U–D–A
|  |  |
U–D–A
|  |
D–A
|
A
```

c)
```
O–D
|  |
D–A
```

d)
```
B–U
|  |
U–D
|  |
D–A
```

e)
```
B–U–D–A–P–E–S–T
|  |  |  |  |  |  |
U–D–A–P–E–S–T
|  |  |  |  |  |
D–A–P–E–S–T
|  |  |  |  |
A–P–E–S–T
|  |  |  |
P–E–S–T
|  |  |
E–S–T
|  |
S–T
|
T
```

f)
```
B–U–D–A
|  |  |  |
U–D–A–P
|  |  |  |
D–A–P–E
|  |  |  |
A–P–E–S
|  |  |  |
P–E–S–T
```

Gondolkodjunk együtt!

13. Melyek azok a feladatok az alábbiak közül, amelyek mögött ugyanaz a matematikai probléma rejlik?

a) Egy fogadáson hat diplomata találkozott. Mindegyik mindegyikkel kezet fogott. Hány kézfogás történt?

b) Hat számkártyánk van: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$. Hány kétjegyű számot lehet ezekből kirakni?

c) Hat számkártyánk van: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$. Hány hatjegyű számot lehet ezekből kirakni?

d) Elfelejtettem egy szentendrei telefonszámot. Csak arra emlékszem, hogy 4-nél kisebb számjegy nem fordult elő benne. Hány telefonszám jöhet szóba? (A szentendrei telefonszámok hatjegyűek.)

e) Karácsonykor egy kisváros főterén hat ugyanolyan faházikót állítottak fel. A bölcs polgármester sorsolással döntötte el, hogy melyik házikóban ki árulhasson. Hatan pályáztak a házakra: a halas, a könyvárus, a bábos, a fazekas, a pecsenyesütő és a kürtőskalácsos.
Hányféleképpen lehet a 6 faházat a hat árus között kisorsolni?

f) Egy nagy fa törzséből hat nagyon vastag ág nő ki, mindegyikből hat vastag ág, ezek mindegyikéből hat vékony ág, ezek mindegyikéből hat görbe ág, ezek mindegyikéből hat göcsörtös ág. Ezek mindegyikén hat szép sárga virág van. Hány virág van a fán?

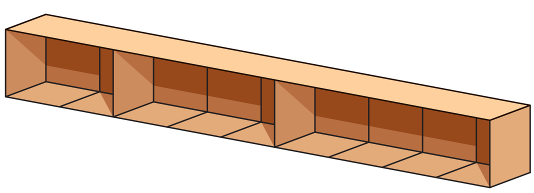
14. Melyek azok a feladatok az alábbiak közül, amelyek mögött ugyanaz a matematikai probléma rejlik?

a) Egy körön megjelölünk 77 pontot. Hány olyan szakasz húzható, amelynek végpontjai csak megjelölt pontok lehetnek?

b) Egy szabályos 77-szögnek hány átlója van?

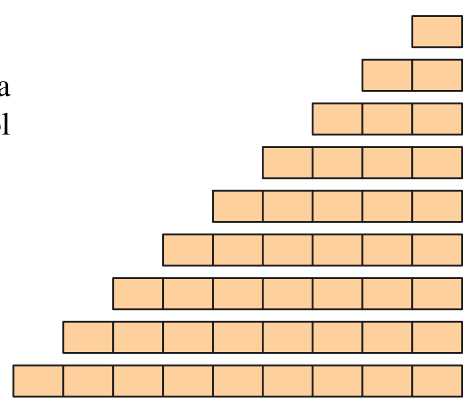
c) Összeadjuk a természetes számokat 1-től 77-ig. Mennyi az összeg?

d) Összeadjuk a természetes számokat 1-től 76-ig. Mennyi az összeg?

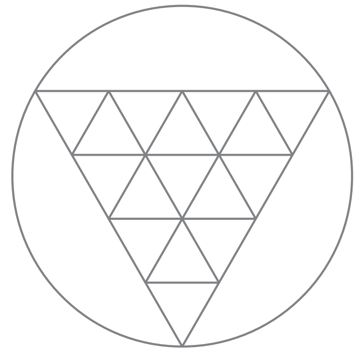
e) 

Egy szekrénysor polcaira nyolc helyen lehet választófalat rakni. Az egyik polcon két választófalat akarunk elhelyezni. Hányféle lehetőségünk van?

f) Ilyen léceink vannak, mindegyikből 10 darab. Közülük a leghosszabb lécet hányféleképpen lehet három darabból összeragasztani?



Játékok, híres fejtörők



1. Két rejtvényt tartalmaz ez a rajz, amelyet időszámításunk előtt 1500 évvel egy Ahmed nevű egyiptomi pap eszelt ki.

a) Hogyan lehet egy vonallal megrajzolni anélkül, hogy a rajz bármelyik kis részén kétszer haladnánk át?

b) Hány háromszög van az ábrán?

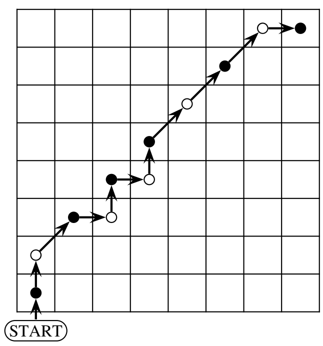
c) Te is találj ki a rajzhoz kapcsolódó feladatokat!

2. Mit nevezünk stratégiai játéknak, nyerő stratégiának?

Az ilyen típusú játékokban a játékosok megadott szabály szerint, felváltva lépnek. A kezdeti feltételek már meghatározzák, hogy az első vagy a második játékos van nyerő helyzetben, a véletlennek ebben nincs szerepe. Előre kidolgozható az úgynevezett **nyerő stratégia,** ami a következőket jelenti:

– jól döntünk arról, hogy elsők legyünk, vagy átengedjük a kezdés jogát játékostársunknak,

– úgy tervezzük meg lépéseinket, hogy ellenfelünk bármilyen lépéssorozata esetén nyerhessünk.



Társaddal játszhatod a következő, *Irány a másik sarok* nevű stratégiai játékot.

Egy nyolcszor nyolcas négyzeten, például egy sakktáblán helyezzetek el a bal alsó sarokban egy figurát, például egy gyalogot! Ezzel léphettek felváltva, egyszerre egy négyzettel arrébb: jobbra, vagy fölfelé, vagy rézsútosan jobbra, fölfelé. Az nyer, aki a jobb felső sarokba viszi a figurát. Üres karikával az első játékos húzását, tele karikával a második játékos húzását jelöltük. Ezen a rajzon az első játékos kezdett, és a második játékos nyert.

Kinek van nyerő stratégiája?

3. *a)* Társaddal játszhatod a következő, *Nyolcból négyet* nevű játékot.

Egyikőtök felír egy négyjegyű számot, a másiknak ezt kell majd kitalálnia. A négyjegyű számban csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek fordulhatnak elő, de egy számjegy legfeljebb csak egyszer szerepelhet.

Aki ki akarja találni a számot, szintén ilyen típusú négyjegyű számot kérdez, partnere megmondja, hogy hány számot talált el, és hogy közülük hány van a saját helyén. Legyen például a gondolt szám 3472! Legyen az első kérdés 2785! A válasz 2/0, mert két számot, a 2-t és a 7-et eltalálta, de ebből egyik sincs a helyén. A következő tipp: 2475. Erre a válasz 3/2, mert három számot eltalált, a 2-est, a 4-est és a 7-est, és ezek közül kettő, a 4-es és a 7-es a helyén van. A cél: minél kevesebb találgatással kitalálni a gondolt számot.

b) *Nyolcból négyet* játékokról készültek az alábbi feljegyzések. Próbáld meg kitalálni, hogy mi lehetett a gondolt szám a két esetben!

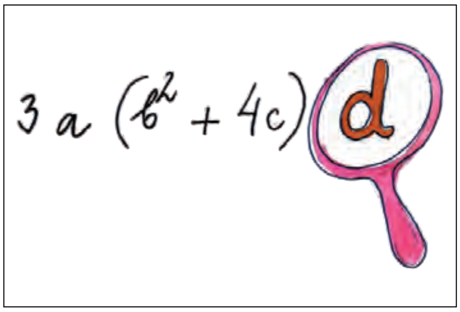
1. játék		*2. játék*	
7652	2/0	2816	2/2
8721	2/0	5817	3/2
4237	2/2	5876	2/0
4587	0/0		

Algebrai kifejezések

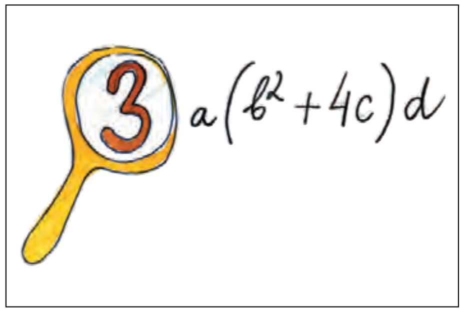
Algebrai kifejezések nagyító alatt

Mi minden lehet egy algebrai kifejezésben?

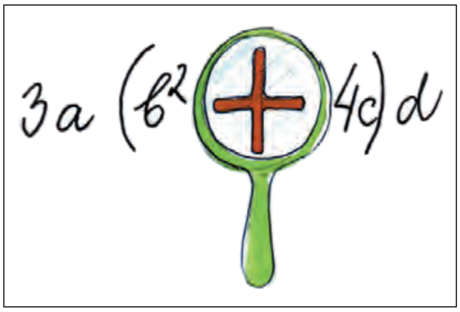
betűk



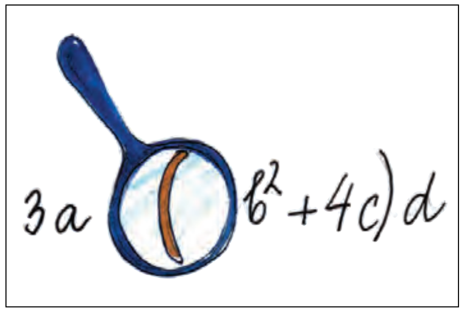
számok



műveleti jelek



zárójelek



Vannak benne láthatatlan szorzásjelek is.

Két betű közé | szám és betű közé | szám és zárójel közé | betű és zárójel közé

nem mindig írjuk ki a szorzásjelet.
Ilyenkor az egymás mellé írás szorzást jelent.

Két szám közé mindig ki kell írni a szorzásjelet, hiszen különben a 213 jelenthetne $2 \cdot 13$-at, $21 \cdot 3$-at és $2 \cdot 1 \cdot 3$-at is.

A nagyítóval megvizsgált kifejezésben is vannak láthatatlan szorzásjelek. Pirossal bejelöltük őket.

$$3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c) \cdot d$$

Behelyettesítés

Az algebrai kifejezésekben mindegyik betű valamilyen számot takar.

Ha az algebrai kifejezésbe a betűk helyére **behelyettesítjük** a számértéküket és elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor megkapjuk a kifejezés **helyettesítési értékét.**

1. példa

Adjuk meg a $3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c)$ algebrai kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ és $c = -0{,}4$.